Chapitre 6

Systémes digitales

Objectifs

1. Savoir que des systèmes digitalisés ont d'autres conditions de stabilités que des systèmes continus

Dans ce temps de digitalisation on utilise partout des ordinateurs dans des circuits de réglage.Pensez au PLC, qui est en fait un micro-ordinateur.De plus en plus on utilise des ordinateurs dans l'automatisation. Pour cela il est nécessaire de regarder le système digitalisé.

6.1 Le régulateur digital

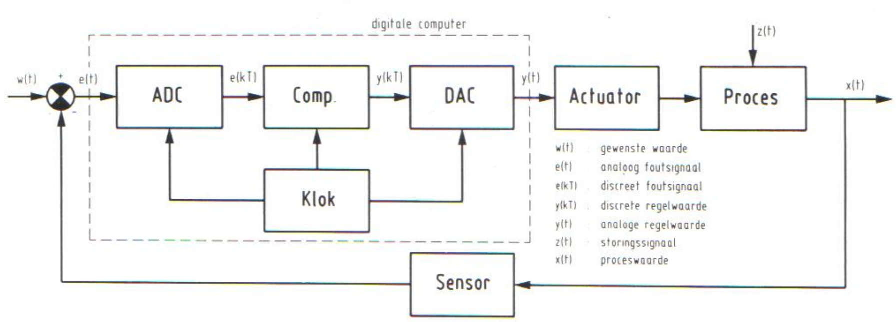

FIGURE 6.1 – source :'Regeltechniek3', Die Keure

La figure ci dessus vous donne le schèma de bloques d'un régulateur digital.Parce qu'un ordinateur ne fonctionne qu'avec des valeurs digitales, il faut mettre un module avant l'ordinateur qui transforme des signaux continus en signaux digitaux.On appelle un tel module AD-converteur, converteur analogue-digitale.Quand les signaux sortent de l'ordinateur il doivent être transformé de forme digitale en forme analogue, donc on a besoin d'un converteur-DA, converteur digital-analogue.

La transformation de valeurs analogues en valeurs digitales est appelé échantilloner.En anglais, sampling.

6.2 D'analogue à digital : échantillonnage

L' ADC échantillonne des signaux analogues.Cette échantillonnage se passe regulièrement, chaque T secondes.Donc à chaque T secondes on ferme un interrupteur pendant Δt secondes. Cette transformation est mise dans la figure ci dessous.

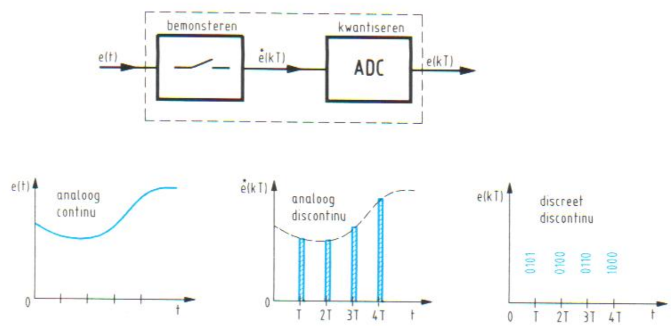

FIGURE 6.2 – source :'Regeltechniek3', Die Keure

Le converteur doit respecter quelques demandes comme resolution et précision.

Sous resolution on comprend *le plus petit changement analogue que l'on peut encore observer à la sortie.*

Un converteur4-bit a $2^4 = 16$ niveau de sortie possible. Ceci vous donne une resolution de $\frac{1}{16} = 6.25\%$ de l'échelle.

Sous précision on comprend *la quantité avec laquelle le signal à la sortie peut devier de la valeur théorique qui devra correspondre avec la valeur d'entrée exacte.*

S'il n' y a pas d'application de compensation cette erreur peut avoir une valeur positioné entre 0 et la valeur du bit le moins signifiant.

Des problèmes extra sont la durée d'échantillonement et la fréquence d'échantillonement.

6.2.1 Durée d'échantillonement :le circuit hold

L'échantillonnage prend un certain temps que l'on appelle le temps de conversion. En moyenne, le temps se trouve entre milli et nanosecondes.Le signal continu est en faite plus rapide (en théorie infiniment plus vite).Dans ce temps on peut avoir des changements importants dans le signal analogue. C'est pourqoi il est possible que le signal digital ne corresponde plus exactement à la valeur digitale. Pour cela l' ADC est précédé d'un circuit sample et hold. Ceci est un interrupteur qui est fermé sur des moments réguliers et ne prend le signal analogue que pour des moments instantanés.Ces moments instantanés peut être transformés en un signal digital.

Généralement on prend pour ce circuit le zero order hold ce qui veut dire que la valeur qui était mésurée au moment de fermeture est maintenue.

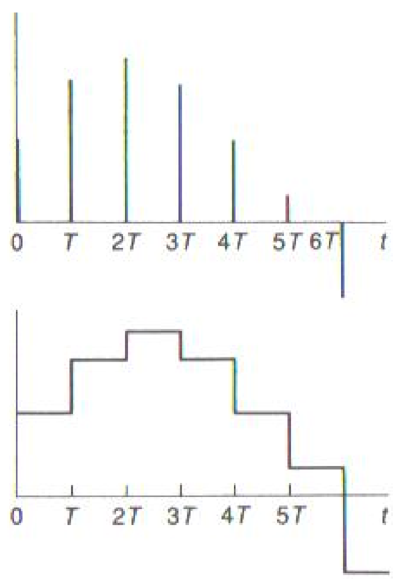

FIGURE 6.3 – source :'Regeltechniek3', Die Keure

Sur la figure ci dessus on voit que le temps d'échantillonnage Δt est la différence entre deux moments d'échantillonnage T_n et T_{n+1} et que la valeur de début est maintenue.Il exist encore le first et le second order hold mais cela nous éloignera de sujet.

6.2.2 Fréquence d'échantillonnage

Pour étudier ce problème il existe un theorème très important.C'est à dire le theorème de Shannon qui a une importance fondamentale dans cette théorie.L'épreuve elle même n'est pas traitée mais seulement évoquée.

La fréquence d'échantillonnage d'un signal périodique doit être au moins le double de la fréquence maximale qui est présente dans le signal analogue.

Donc

$$f_s > 2f_{max}$$

6.3 Description mathématique

Dans ce paragraphe nous allons introduire la déscription mathématique de la théorie des systèmes digitaux.Le but est seulement de vous de montrer comment on résoud des problèmes discontinus ou digitaux.

Pour donner une déscription mathématique du *circuit hold* (zero order hold), nous allons utiliser la transformation de Laplace. A temps t=0 le premier échantillonement commence.Un échantillonnage n'est plus qu'une impulse avec hauteur f(0), la valeur de fonction du signal qu'on échantillone au moment t=0.Le zero order hold n'est qu'un step et dans le domaine s devient $\frac{1}{s}$.Une durée d'échantillonnage t=T plus tard ce step doit être compensé pourque l'on puisse prendre le nouveau signal avec la valeur de f(T). Le step qu'on prend au temps T plus tard est donc premièrement compensé avec le step avant.Le step qui compense est donc le même step mais avec une amplitude négative et remise dans le temps.Il faut donc appliquer le theorème de translation.Nous remettons le même step d'un temps T. Donc la transformé de Laplace du deuxième step devient $e^{-Ts}\frac{1}{s}$.

Nous prenons la somme des deux pour modelliser le zero order hold.

$$\frac{1}{s} - e^{-Ts}\frac{1}{s} = \frac{1-e^{-Ts}}{s}$$

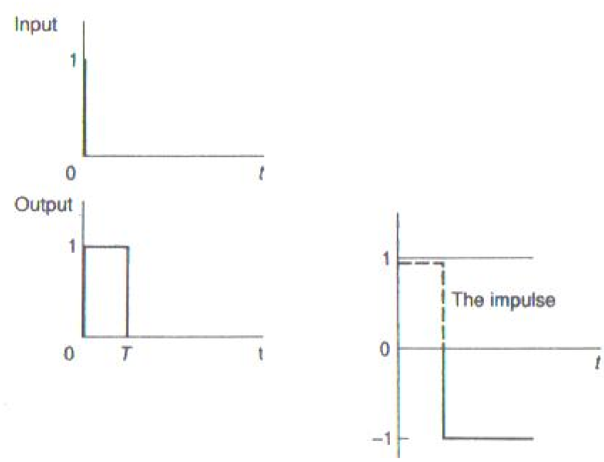

FIGURE 6.4 – source :'Control engineering', W.Bolton

L' *échantillonnage* est en fait une somme de fonctions d'impulse, qui viennent d'une mesure qu'on a pris un certain moment T et au moment t=nT nous obtenons

$f^*(t) = f(0)(impuls0)+f(T)(impulsT)+f(2T)(impuls2T)+...+f(nT)(impulsnT)$

On obtient après avoir calculé le transformation de Laplace

$F^*(s) = (F(0)stap(s)+F(T)e^{-Ts}stap(s)+F(2T)e^{-2Ts}stap(s)+...+F(nT)e^{-nTs}stap(s))$

Faites attention parce que l'impuls dans le domaine du temps est un step dans le domaine de fréquence

$$F^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} F(nT)e^{-nTs}1(s)$$

Supposons que $z = e^{Ts}$ et donc $s = \frac{\ln z}{T}$

Nous pouvons réécrire la suite comme :

$$F^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F(nT)z^{-n}$$

avec F(T) la valeur mesurée au moment T. Cette transformation est appelée la transformation Z qui est appliquée pour décrire des systémes discrès. Si nous mettons la valeur f(T) égale à 1, donc nous utilisons le step d'unité nous pouvons réécrire la suite comme :

$$F(z) = z^{-0} + z^{-1} + z^{-2} + ...z^{-n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{z}{z - 1}$$

En fait dans le cas d'échantillonement on a une réponse de fréquence parce que léchantillonement se passe à une certaine fréquence. Donc z est un nombre complexe.Parce que $z = e^{sT}$ et $s = a + jb$ nous pouvons réécrire z comme

$$z = |z|e^{j\angle z} = e^{aT}e^{jbT}$$

La condition de stabilité était que tous les pôles devaient se trouver dans la demis surface complexe á gauche, donc $a < 0$.

$$|z| = e^{aT} < 1$$

parce qu'un exponentiel qui a dans l'exposé une valeur négative est de toute façon plus petit que 1. Autrement dit nous pouvons dire qu' après longtemps, donc la limite à l'infini dans le temps, le module doit rester limité. Le module de z est e^{aT} et pour rester fini a doit être negatif ou le module est plus petit que 1.

Autrement dit dans le cas de systèmes digitaux la condition de stabilité devient : **Tous les pôles du système doivent se trouver dans le cercle d'unité.**

6.4 Exercice

Avec cette exercise nous allons illustrer que la periode d'échantillonage a une influence sur la stabilité du système.

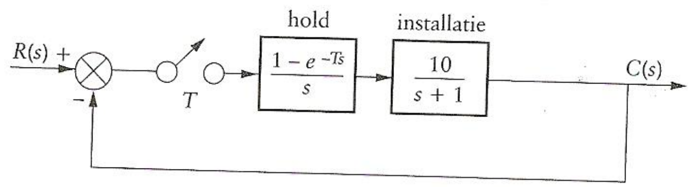

FIGURE 6.5 – source :'Regeltechniek voor technici',Norman S.Nise

Nous voyons dans la boucle que nous avons un système de premiér ordre

$$\frac{10}{s+1}$$

et le zero order hold

$$\frac{1-e^{-Ts}}{s}$$

. Pour résoudre cet exercise il faut utiliser la table á la fin de ce chapitre car maintenant nous étudions des sytèmes discrétes il faut donc calculer avec des transformations Z.

Une boucle fermée nous donne comme fonction de transfer

$$T(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)}$$

Plus tard il faut transformer G(s) en G(z). Pour G(s) nous avons

$$\frac{10(1-e^{-Ts})}{s(s+1)}$$

Sur cette équation nous appliquons les fractions partielles et ceci nous donne comme résultat

$$10(1-e^{-Ts})(\frac{1}{s} - \frac{1}{(s+1)})$$

Nous calculons la transformé Z terme par terme pour $z = e^{Ts}$

1. $(1-e^{-Ts}) = 1 - z^{-1} = \frac{z-1}{z}$
2. $\frac{1}{s} = \frac{z}{z-1}$(rij 1 table)
3. $\frac{1}{s+1} = \frac{z}{z-e^{-T}}$(rij 4 table)

Vous pouvez voir déjà que dans le troisième terme que la stabilité du systéme dépend de T donc de la periode (temps) d'échantillonage.

Remplir et simplifier nous donne comme fonction de transfer (en Z)

$$T(z) = \frac{10(1 - e^{-T})}{z - (11e^{-T} - 10)}$$

La condition de stabilité ést que les pôles doivent se retrouver dans le cercle d'unité ou autrement dit la norme du pôle est inferieure de 1.

Le pôle est

$$a = 11e^{-T} - 10$$

Ça veut dire

$$|11e^{-T} - 10| < 1$$

Aprés calculation

$$0 < T < 0,2$$

Le temps d'échantillonement doir être inferieure de 0,2 seconden ou le systéme devient instable.

TABEL 13.1 Deeltabel van z- en s-getransformeerden

	$f(t)$	$F(s)$	$F(z)$	$f(kT)$
1.	$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$	$u(kT)$
2.	t	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$	kT
3.	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\lim_{a\to 0}(-1)^n\frac{d^n}{da^n}\left[\frac{z}{z-e^{-aT}}\right]$	$(kT)^n$
4.	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$	e^{-akT}
5.	$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$	$(-1)^n\frac{d^n}{da^n}\left[\frac{z}{z-e^{-aT}}\right]$	$(kT)^n e^{-akT}$
6.	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$	$\sin \omega kT$
7.	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$	$\cos \omega kT$
8.	$e^{-at}\sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$	$e^{-akT}\sin \omega kT$
9.	$e^{-at}\cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$	$e^{-akT}\cos \omega kT$

TABEL 13.2 z-transformatiestellingen

	Stelling	Naam
1.	$z\{af(t)\} = aF(z)$	lineariteitsstelling
2.	$z\{f_1(t)+f_2(t)\} = F_1(z)+F_2(z)$	lineariteitsstelling
3.	$z\{e^{-at}f(t)\} = F(e^{aT}z)$	complexe differentiatie
4.	$z\{f(t-nT)\} = z^{-n}F(z)$	reële translatie
5.	$z\{tf(t)\} = Tz\frac{dF(z)}{dz}$	complexe differentiatie
6.	$f(0) = \lim_{z\to\infty} F(z)$	beginwaardestelling
7.	$f(\infty) = \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})F(z)$	eindwaardestelling

Opmerking: kT kan in de tabel voor t worden gesubstitueerd.

Figure 6.6 – source :'Regeltechniek voor technici',Norman S.Nise