

Hoofdstuk 3

Stroomtheorie

Doelstellingen

1. Weten welke signalen men aan de ingang kan aanleggen om de reactie van een systeem te bestuderen
2. Weten wat een Bode en Nyquistdiagram voorstellen en deze diagramma's kunnen tekenen
3. Basiseigenschappen van een aantal systemen kennen

In dit hoofdstuk gaan we kijken naar het gedrag van systemen. Hiertoe gaan we beginnen met de systemen van laagste orde tot systemen van hogere orde en dode tijdsystemen. We gaan ook kijken naar het gedrag van het systeem naargelang het signaal dat we aan de ingang aanleggen. Een ander signaal aan de ingang geeft uiteraard ook een ander signaal aan de uitgang. Bovendien zullen verschillende signalen ook aanleiding geven tot andere stabiliteitsproblemen en zal men dus de regelaar moeten aanpassen.

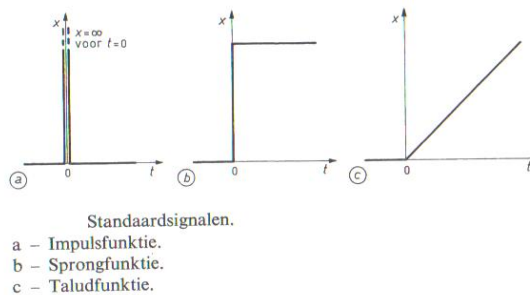
3.1 Signalen aan de ingang

Als men een systeem onderzoekt gaat men kijken naar de verhouding van het signaal dat men aan de ingang van het systeem aanlegt tot het signaal dat men aan de uitgang uit krijgt, de responsie. Signalen kunnen ook met wiskundige formules beschreven worden. Zo verdeelt men deze ingangssignalen in twee grote groepen namelijk de tijdssignalen en de frequentiesignalen.

Voor de tijdssignalen zijn er klassiek een drietal signalen die men gebruikt om een systeem te bestuderen. Zo meet men de impulsresponsie, de stapresponsie en de taludresponsie aan de uitgang. Hier dient nu reeds de opmerking gemaakt dat een stapresponsie steeds de grootste verandering bij dezelfde amplitude van ingangssignaal zal opleveren. Dus als men een systeem kan regelen op een stapsignaal dan kan men het ook regelen op eender welk ander tijdssignaal.

Voor de frequentiesignalen is er klassiek één signaal dat men gebruikt namelijk een sinusfunctie. De reden hiervan ligt voor de hand. Elk periodisch signaal

kan beschreven worden door een som van sinus- en cosinusfuncties met behulp van Fourierreeksen. Dus als men weet hoe een sinussignaal zich gedraagt weet men meestal ook wat er met willekeurige periodische signalen gebeurt.



Figuur 3.1: bron: 'Regeltechniek'; J.Cools, Elsevier

3.1.1 Impulsfunctie

De impulsresponsie stelt eigenlijk een plotse verandering voor, die onmiddellijk beëindigd wordt. Een voorbeeld hiervan is een kraan die open en toe gedraaid wordt.

De impuls wordt in de wiskunde beschreven door de Diracpuls $\delta(t)$. De Laplacegetransformeerde hiervan is $1(s)$.

3.1.2 Stapfunctie

De stapfunctie stelt een plotse verandering voor *die na verloop van tijd beëindigd wordt*. Een voorbeeld hiervan is een kraan die open gedraaid wordt en die pas na een tijdje geopend geweest te zijn terug wordt toe gedraaid.

De stap wordt in de wiskunde beschreven door een Heavisidefunctie $H(t)$ of $1(t)$. De Laplacegetransformeerde van deze functie is $\frac{1}{s}$.

3.1.3 Taludfunctie

De taludfunctie stelt een verandering voor die eigenlijk op dezelfde manier in de tijd blijft veranderen. Een voorbeeld hiervan is een kraan die men open draait en op dezelfde manier blijft open draaien gedurende een zekere tijd.

Wiskundig wordt deze functie voorgesteld door een lineaire functie $t(t)$. De Laplacegetransformeerde hiervan is $\frac{1}{s^2}$.

3.1.4 Sinusfunctie

De sinusfunctie is een basisfunctie die een periodisch signaal beschrijft. Wiskundig wordt dit signaal voorgesteld door $\sin(\omega t)$. De Laplacegetransformeerde

hiervan is $\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$. Als men een periodisch signaal beschrijft gaat men de transfertfunctie herschrijven door s te vervangen door $j\omega$. Dit volgt uit het feit dat men de stelling van Euler toepast op een periodisch signaal. Met andere woorden: de ingang is

$$x = X(\cos \omega t + j \sin \omega t) = X e^{j\omega t}$$

en de uitgang is

$$y = Y(\cos(\omega t + \phi) + j \sin(\omega t + \phi)) = Y e^{(j\omega t + \phi)}$$

Dus we stellen de sinusfunctie voor door een complexe e-macht wat de berekeningen sterk zal vereenvoudigen. Als we nu de afgeleides nemen vinden we dezelfde functie terug vermenigvuldigd met het argument $j\omega$, met andere woorden

$$\frac{d(e^{j\omega t})}{dt} = e^{j\omega t} j\omega$$

Vermits s in de Laplacetransformatie niet meer voorstelt als een afgeleide kunnen we een willekeurige transfertfunctie voorstellen als¹

$$H(s) = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_0}$$

Na invullen van $s = e^{j\omega t}$ krijgen we

$$H = \frac{a_m (j\omega)^m + a_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + a_0}{b_n (j\omega)^n + b_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + b_0}$$

Dit is een quotiënt van twee complexe getallen waarvan we modulus en argument kunnen berekenen. Modulus en argument kunnen we voorstellen in een diagram. Zo zijn er drie veel gebruikte diagramma's in de regeltechniek namelijk het Bode, Nyquist en Black- of Nichols- diagram.

3.1.5 Diagramma's van Bode en Nyquist

Bodediagram

In dit diagramma stelt men modulus en argument in functie van de frequentie, eigenlijk pulsatie, in afzonderlijke diagramma's voor.

De modulus stelt eigenlijk de versterking voor en wordt voorgesteld in dB. Dit is 20 maal de waarde van het logaritme van de modulus. Dit diagram wordt dan ook op logaritmische schaal voorgesteld.

Het argument stelt de faseverschuiving voor van de uitgang ten opzichte van de ingang.

Men gaat deze grafieken steeds vereenvoudigd voorstellen. Dit noemt men de asymptotische voorstelling. Men gaat beide grafieken evalueren voor kleine

¹zie hoofdstuk 1

waarden van ω en voor grote waarden van ω . Met andere woorden men neemt de limiet van zowel argument als modulus voor ω naar nul en voor ω naar oneindig. Ergens tussenin kan de functie haar gedrag wijzigen, dit noemt men de breekpulsatie. In het algemeen heeft men een transfertfunctie van volgende vorm

$$H(s) = \frac{A(s)}{B(s).C(s)}$$

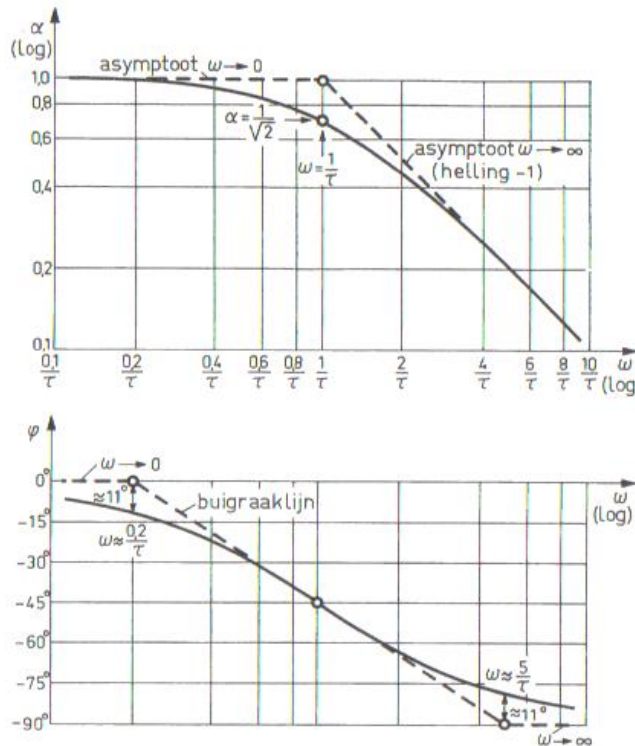
Dit geeft volgende versterking

$$20 \log\left(\left|\frac{A}{B.C}\right|\right) = 20 \log |A| - 20 \log |B| - 20 \log |C|$$

en volgende faseverschuiving

$$\angle H(s) = \angle \frac{A}{B.C} = \angle A - \angle B - \angle C$$

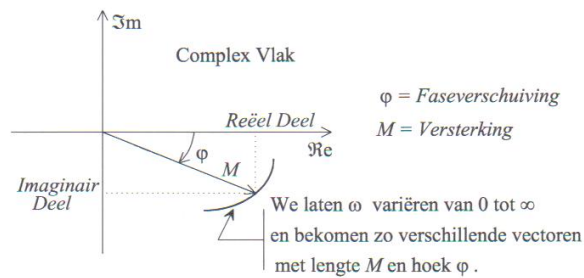
Onderstaande grafiek geeft het voorbeeld van een eerste orde systeem.



Figuur 3.2: bron: 'Regeltechniek'; J.Cools, Elsevier

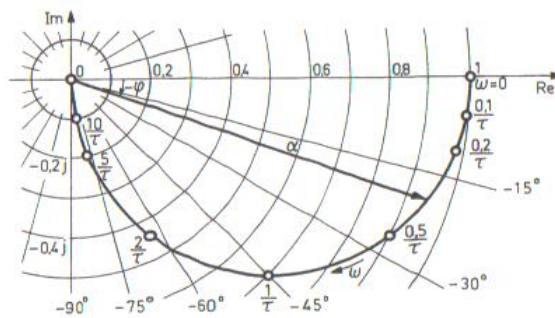
Nyquistdiagram

Het Nyquistdiagram vormt naast het Bodediagram een tweede mogelijke manier om het frequentiegedrag van een systeem voor te stellen. In het Nyquistdiagram wordt het reële deel en het imaginaire deel op een diagram uitgezet en dit voor alle frequenties, eigenlijk pulsatie's van nul tot oneindig. Eigenlijk kan men veel eenvoudiger stellen dat men een vektor uitzet in het imaginaire vlak. De vektor wordt gegeven door de modulus (grootte) en argument (hoek of fase). Deze techniek wordt in onderstaande figuur verduidelijkt.



Figuur 3.3: bron: 'Regeltechniek'; J.Cools, Elsevier

Onderstaand diagram is een Nyquistdiagram voor een eerste orde-systeem

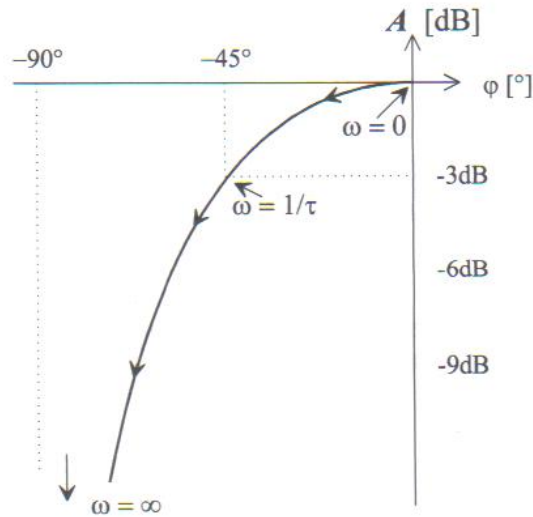


Figuur 3.4: bron: 'Regeltechniek'; J.Cools, Elsevier

Black- of Nicholsdiagram

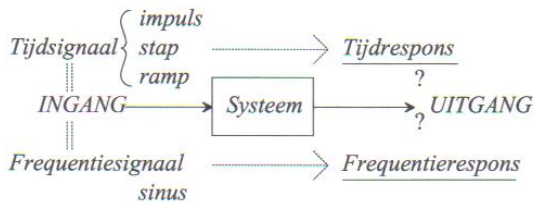
Hier wordt de versterking (in dB) uitgezet in functie van de faseverschuiving. Ook hier gaat men dit doen voor de pulsatie gaan de van nul tot oneindig.

Onderstaande figuur geeft een voorbeeld van een Nicholsdiagram voor een eerste orde systeem



Figuur 3.5: bron: 'Regeltechniek'; J.Cools, Elsevier

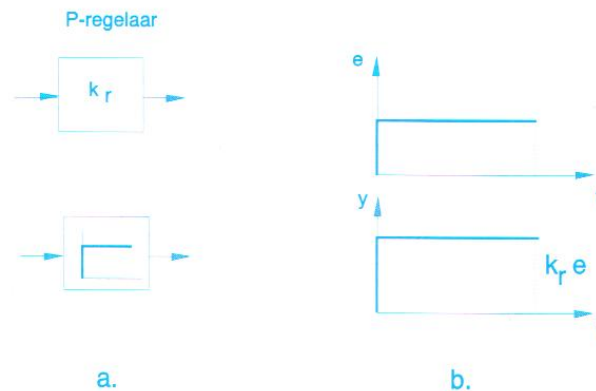
Gewapend met deze informatie gaan we nu de studie maken van de meest frequente systemen in de systeemtheorie. Deze studie zal zich beperken tot stap-frequentieresponsies. Onderstaande figuur maakt duidelijk hoe dit zal gebeuren. In het vakje systeem vullen we dan de desbetreffende transferfunctie in. De ingang X is dus de sinus of stapfunctie en de uitgang Y wordt berekend met de gekende formule van de transferfunctie $H = \frac{Y}{X}$. Achteraf voeren we een inverse Laplacetransformatie door om tot het tijdsbeeld te komen van dit systeem.



Figuur 3.6: bron: 'Regeltechniek'; J.Cools, Elsevier

3.2 Constante (proportionele) systemen

Bij een constant systeem gaat de ingang vermenigvuldigt worden met een constante waarde. In dit systeem is de uitgang dus proportioneel met de ingang. Daarom noemt men dit systeem ook wel een proportioneel systeem.



Figuur 3.7: bron: 'Regeltechniek1', Die Keure

3.2.1 Stapresponsie van een proportioneel systeem

We hebben voor het systeem: $H(s) = K$ Voor de stap aan de ingang hebben we $X = \frac{1}{s}$ Hieruit volgt $Y(s) = H(s)X(s)$ of $Y(s) = K * \frac{1}{s}$. Met de inverse Laplacetransformatie wordt het tijdsbeeld $y(t) = K1(t)$. Met andere woorden de ingang wordt gewoon versterkt met een factor K, zoals in bovenstaande figuur wordt getoond.

3.2.2 Sinusresponsie van een proportioneel systeem

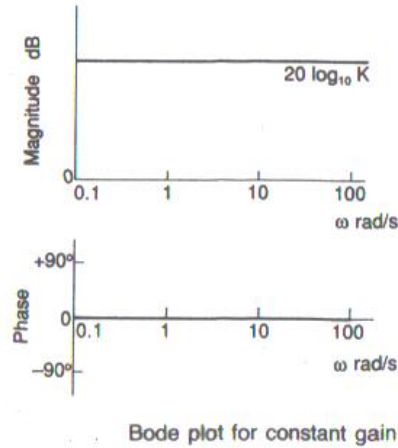
De redenering is dezelfde als voorheen. De sinus aan de ingang gaat gewoon versterkt aan de uitgang verschijnen. Met ander woorden de amplitude zal toegenomen zijn, de frequentie en fase blijven onverandert.

Het Bodediagram wordt

Het Nyquistdiagram wordt herleid tot een punt vermits voor alle waarden van ω we dezelfde faseverschuiving en amplitude hebben.

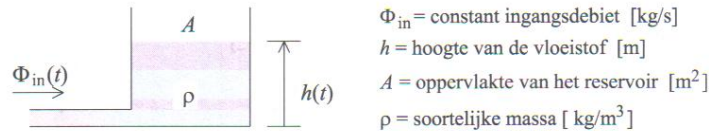
3.3 Integrator

Het integreren van een systeem bestaat er eigenlijk in dat men eeningangssignaal gaat sommeren. Met andere woorden een systeem waar men een ophoping



Figuur 3.8: bron: 'Regeltechniek'; J.Cools, Elsevier

in vaststelt wordt beschreven door een integrerend systeem. Een voorbeeld hiervan is een reservoir waar men vloeistof in opslaat.



Figuur 3.9: bron: 'Regeltechniek'; J.Cools, Elsevier

Het instromend waterdebiet heeft tot gevolg dat het water stijgt. Wiskundig geformuleerd

$$\Phi_{in} = \rho \frac{dV}{dt}$$

Het volume verandert in de tijd maar de grondoppervlakte blijft dezelfde dus enkel de hoogte verandert in de tijd m.a.w.

$$\Phi_{in} = \rho A \frac{dh}{dt}$$

Na het nemen van de Laplacetransformatie van beide leden krijgen we

$$\phi_{in} = \rho A s h$$

Of geschreven in een transfertfunctie

$$H(s) = \frac{h}{\phi_{in}} = \frac{1}{\rho A s}$$

Dit is een zuiver integrator want als we naar de Laplacetransformatie van de integraal kijken krijgen we ook iets van de vorm $\frac{1}{s}$. In dit geval schrijven we meer algemeen een integrerend systeem als $\frac{1}{\tau_i s}$ met τ_i de tijdsconstante van de integrator. In het geval van het vat is $\tau_i = \rho A$.

3.3.1 Stapresponsie van de integrator

Voor het systeem hebben we $H(s) = \frac{1}{\tau_i s}$. Voor de stap hebben we $X(s) = \frac{1}{s}$. Hieruit volgt

$$Y(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{\tau_i s} = \frac{1}{\tau_i s^2}$$

In het tijdsgebied krijgen we na het berekenen van de invers Laplacegetransformeerde

$$y(t) = \frac{t}{\tau_i}$$

Met andere woorden als we een integrerend systeem hebben zal, als we een stap aanleggen aan de ingang, zal het systeem in de tijd lineair toenemen. In het geval van het vat zal de stand in dit vat lineair toenemen in de tijd.

3.3.2 Sinusresponsie van de integrator

Zoals reeds gezegd in het begin van het hoofdstuk moeten we s vervangen door $j\omega$. Dan krijgen we voor een integrerend systeem volgende transfertfunctie $H(j\omega) = \frac{1}{\tau_i j\omega}$. Berekenen we modulus dan krijgen we volgende waarde

$$20 \log |H(j\omega)| = -20 \log \tau_i \omega$$

en voor de fase krijgen we

$$\tan \phi = \frac{-1}{\tau_i \omega} = -\infty$$

dus de fase wordt -90° .

Voor modulus en argument onderzoeken we het gedrag bij lage en hoge frequenties met andere woorden nemen we de limiet voor ω naar nul en naar oneindig. Voor het argument hebben we een constante waarde van -90° , maar voor de modulus levert dit ons volgende waarden op :

1. voor lage frequentie

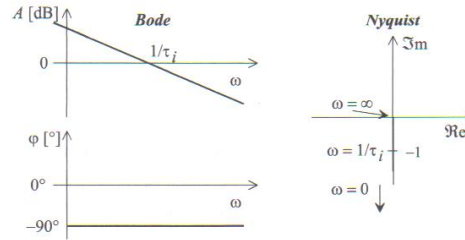
$$\lim_{x \rightarrow 0} 20 \log \tau_i \omega = -\infty$$

2. voor hoge frequentie

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 20 \log \tau_i \omega = +\infty$$

3. Daartussen hebben we een snijpunt met de horizontale as met andere woorden er is een punt waar de versterking gelijk is aan nul. Dit is waar het argument van het logaritme gelijk wordt aan 1. Dit is op het punt $\tau_i \omega = 1$ of $\omega = \frac{1}{\tau_i}$.

Dit levert volgende Bodediagram en Nyquistdiagram op



Figuur 3.10: bron: 'Regeltechniek'; J.Cools, Elsevier

3.4 Differentiator

Om een differentiator fysisch te begrijpen bekijken we een zuiger met oppervlakte A . Deze zuiger staat op ingangssignaal, hoogte h . Het uitgangssignaal is uitstromend debiet Φ_{uit} . Staat de zuiger stil dan stroomt er geen vloeistof naar buiten. Verplaatst de cilinder zich naar beneden met snelheid v gaat er vloeistof naar buiten geperst worden met constant debiet. Naarmate de snelheid groter is, krijgen we een groter debiet, dus een groter uitgangssignaal. De uitgang is evenredig met de snelheid en de snelheid is de afgeleide (differentiaal) van de hoogte naar de tijd. Wiskundig geformuleerd

$$\Phi_{uit} = \rho \frac{dV}{dt} = \rho A \frac{dh}{dt}$$

Na het doorvoeren van de Laplacetransformatie krijgen we

$$\phi_{uit} = \rho A h s$$

Geschreven in een transfertfunctie krijgt men

$$H(s) = \frac{\phi_{uit}}{h} = \rho A s$$

De transfertfunctie voor een differentiator kan men in zijn algemene vorm herschrijven als $H(s) = \tau_d s$. Voor de zuiger wordt dit $\tau_d = \rho A$.

3.4.1 Stapresponsie van de differentiator

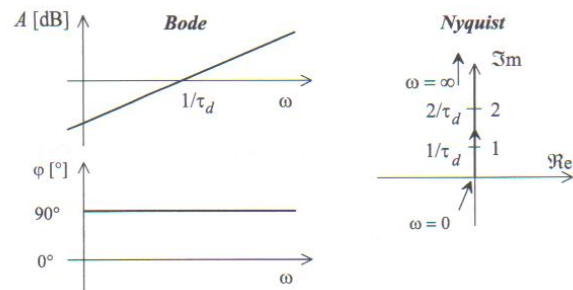
De stapresponsie volgt uit de invers Laplacegetransformeerde van

$$Y(s) = \tau_d s \cdot \frac{1}{s} = \tau_d$$

De oplossing is een impulsfunctie $\tau_d \delta(t)$.

3.4.2 Sinusresponsie van de differentiator

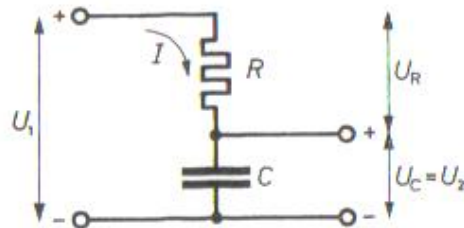
Het opstellen van Bode en Nyquist diagramma's gebeurt zoals in het geval van de integrator maar nu hebben we als transfertfunctie $H(s) = \tau_d s$. Dit levert onderstaande diagramma's op



Figuur 3.11: bron: 'Regeltechniek'; J.Cools, Elsevier

3.5 Eerste orde systemen

Een klassiek eerste ordesysteem is de RC keten. We bekijken in dit geval het opladen van een condensator. Dit is vorig jaar ook uitvoerig behandeld in het hoofdstuk over overgangsverschijnselen. We stellen als ingang de bronspanning en als uitgang de spanning over de condensator.



Figuur 3.12: bron: 'Control engineering'; W.Bolton

Het opstellen van de vergelijking is dus reeds gezien en we verkregen in het tijdsgebied volgende vergelijking voor de bronspanning

$$U_1 = Ri(t) + \frac{1}{C} \int i dt.$$

We nemen van beide leden de Laplacetransformatie en bekomen

$$u_1 = Ri(s) + \frac{i(s)}{Cs}$$

Voor de spanning over de platen krijgen we

$$U_C = \frac{1}{C} \int i dt.$$

De Laplacetransformatie levert volgende vergelijking op

$$u_C = \frac{i(s)}{Cs}$$

Hieruit volgt volgende transfertfunctie

$$H(s) = \frac{1}{1 + RCs}$$

In het algemeen schrijft men de transfertfunctie van een eerste orde als

$$H(s) = \frac{1}{1 + \tau_1 s}$$

In dit geval is τ_1 dus gelijk aan RC en dit is, zoals vorig jaar gezien, de tijdsconstante van het systeem.

3.5.1 Stapresponsie van een eerste orde systeem

De transfertfunctie wordt

$$Y(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1 + \tau_1 s}$$

De invers Laplacegetransformeerde moet men zoeken via de methode van splitsen in partieelbreuken. Men bekomt zo

$$H(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{\tau_1}}$$

Inverse Laplacetransformatie levert ons volgend tijdsbeeld op

$$y(t) = 1(t) - \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right)$$

In voorgaand voorbeeld zal de spanning over de condensator zich exponentieel opladen en na verloop van tijd de bronspanning benaderen. Dit is wat we vorig jaar ook terug gevonden hebben in de cursus elektriciteit maar langs een andere weg.

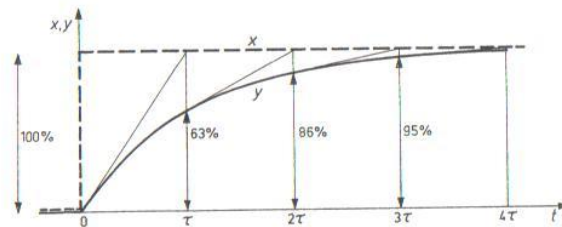
3.5.2 Sinusresponsie van een eerste orde systeem

We volgen de standaardprocedure: De standaardtransfertfunctie voor een eerste orde systeem is

$$H(s) = \frac{1}{1 + \tau_1 s}$$

We moeten s vervangen door $j\omega$ en dan wordt dit

$$H(s) = \frac{1}{1 + j\tau_1 \omega}$$



Figuur 3.13: bron: 'Regeltechniek'; J.Cools, Elsevier

Dit is een complex getal met een complex gedeelte in de noemer, dus moeten we vermenigvuldigen met de complex toegevoegde en dan krijgen we

$$H(s) = \frac{1 - j\tau_1\omega}{1^2 + (\tau_1\omega)^2}$$

Hiervan moeten we modulus en argument berekenen

De modulus wordt:

$$M^2 = \frac{1^2}{(1^2 + (\tau_1\omega)^2)^2} + \frac{(\tau_1\omega)^2}{(1^2 + (\tau_1\omega)^2)^2}$$

en na vereenvoudiging wordt dit

$$M = \frac{1}{\sqrt{1 + (\tau_1\omega)^2}}$$

Het argument wordt

$$\phi = \arctan\left(\frac{-\tau_1\omega}{1}\right)$$

1. De asymptotische waarde voor ω naar 0

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} 20 \log \frac{1}{\sqrt{1 + (\tau_1\omega)^2}} = 0$$

2. De asymptotische waarde voor ω naar oneindig

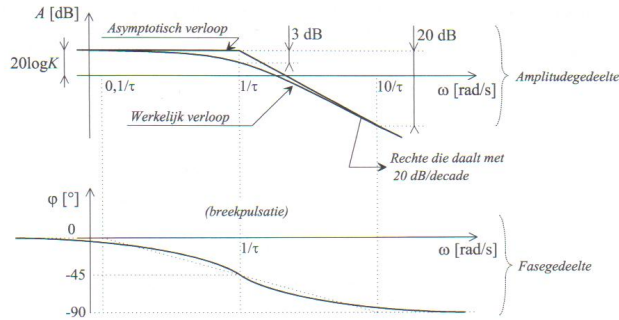
$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} 20 \log \frac{1}{\sqrt{1 + (\tau_1\omega)^2}} = -\infty$$

3. De breekpulsatie of het breekpunt: we hebben een overgang van nul bij lage frequenties en bij hoge frequenties gaat het systeem naar oneindig. Daar waar de waarden 1 en $\tau_1\omega$ ongeveer gelijk worden begint het systeem in gedrag te veranderen met andere woorden bij

$$\omega = \frac{1}{\tau_1}$$

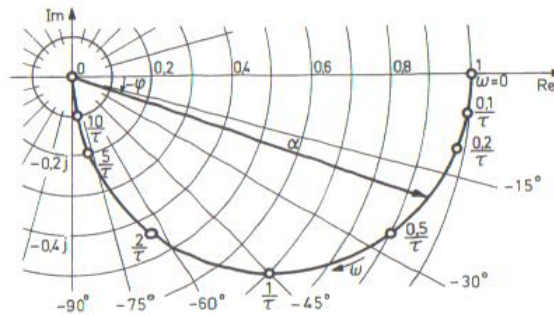
We moeten nog enkel letten op de helling van de rechten. Deze wordt éénvoudig verkregen door volgende redenering. Stel dat ω met een factor 10 vergroot wordt dan zal de volgende waarde -20dB verlaagd zijn.

Dit geeft onderstaand Bodediagram



Figuur 3.14: bron: 'Regeltechniek'; J.Cools, Elsevier

Voor een Nyquistdiagram krijgen we onderstaande figuur



Figuur 3.15: bron: 'Regeltechniek'; J.Cools, Elsevier

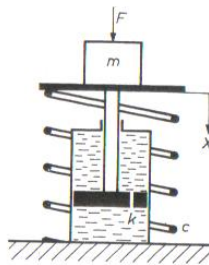
3.6 Tweede orde systemen

Voor tweede orde systemen zijn de voorbeelden legio. In de mechanica het massa veer demper systeem, in de elektriciteit de RLC keten, in de elektronica sommige versterkers en filters. De basistransfertoefunctie voor een tweede orde systeem is volgende

$$H(s) = \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\zeta\frac{s}{\omega_n} + 1}$$

Waarbij ω_n staat voor de eigenfrequentie van het systeem en ζ voor de dempingsfactor.

Als voorbeeld nemen we het massa veer dempersysteem



Figuur 3.16: bron: 'Regeltechniek'; J.Cools, Elsevier

We leggen een uitwendige kracht F aan op het systeem. De demping wordt voorgesteld door visceuse wrijving evenredig met de snelheid $c \frac{dX}{dt}$. De massa heeft een traagheid $m \frac{d^2X}{dt^2}$. De veer geeft een reactiekracht evenredig met de verplaatsing kX . Dan krijgen we volgend model

$$m \frac{d^2X}{dt^2} = F - kX - c \frac{dX}{dt}$$

Na het nemen van de Laplacetransformatie van beide leden verkrijgen we

$$ms^2x(s) = f - kx(s) - csx(s)$$

We stellen de uitgang (het gevolg) is de verplaatsing X en de ingang (de oorzaak) is de uitwendige kracht F . Dan krijgen we als transfertfunctie

$$H(s) = \frac{x}{f} = \frac{1}{ms^2 + cs + k}$$

Als we dit vergelijken met de standaardtransferfunctie herschrijven we de transfertfunctie als

$$H(s) = \frac{1}{\frac{m}{k}s^2 + \frac{c}{k}s + 1}$$

hebben we als

- resonantiefrequentie: $\sqrt{\frac{k}{m}}$
- dempingscoëfficiënt: $\zeta = \frac{c}{k} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{c}{2\sqrt{km}}$

3.6.1 Stapresponsie van tweede orde systemen

De uitgang wordt beschreven door

$$Y(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s^2 + 2\omega_n \zeta s + (\omega_n)^2}$$

De invers Laplacegetransformeerde moet men ook in dit geval berekenen met partieelbreuk splitsing. In het geval van een tweede orde systeem geeft de tweede orde vergelijking in de noemer aanleiding tot drie mogelijke oplossingen. Als men de wortels zoekt van een tweede orde vergelijking hangen deze af van het teken van de discriminant. Als men de discriminant opstelt van de tweede orde vergelijking en men de wortels ervan neemt krijgt men

$$\sqrt{\Delta} = 2\omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

Het teken van deze discriminant hangt dus af van ζ met andere woorden van de demping van het systeem.

Dit geeft aanleiding tot drie verschillende mogelijkheden

1. $\zeta > 1$: In dit geval heeft men twee reële oplossingen voor de tweede orde vergelijking en zal het tijdsgedrag beschreven worden door onderstaande functie

$$y(t) = 1 - \frac{\sqrt{\zeta^2 - 1} - \zeta}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \exp(-\omega_n t(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})) - \frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \exp(-\omega_n t(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}))$$

Dit noemt men een overgedempt systeem

2. $\zeta = 1$: In dit geval heeft men één dubbele oplossing. De twee polen vallen samen en zijn reël. Het tijdsbeeld wordt gegeven door

$$y(t) = 1 - (1 + \omega_n t) \exp(-\omega_n t)$$

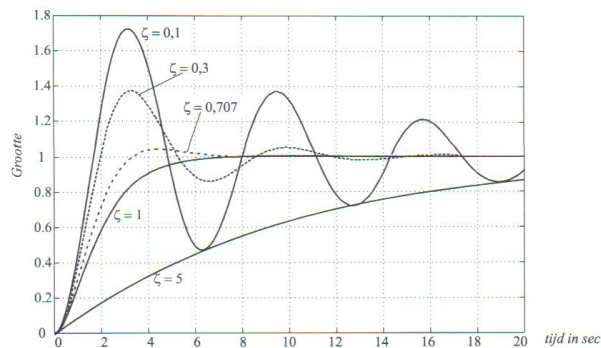
Dit noemt men een kritisch gedempt systeem.

3. $\zeta < 1$: Nu heeft men twee complex toegevoegde polen. Als er een complex getal in de exponent van een exponentiële functie staat kan deze herschreven worden als een sinus en of cosinusfunctie. Ook hier is dit zo en dit heeft tot gevolg dat men een oscillerend gedrag bekommt in de tijd. Het tijdsbeeld wordt

$$y(t) = 1 - \frac{\exp(-\omega_n \zeta t)}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \cdot \sin(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t + \varphi)$$

met $\sin \varphi = \zeta$. Dit systeem noemt men een gedempte oscillatie. Onderstaande grafiek geeft een tijdsbeeld van verschillende bovenstaande gevallen

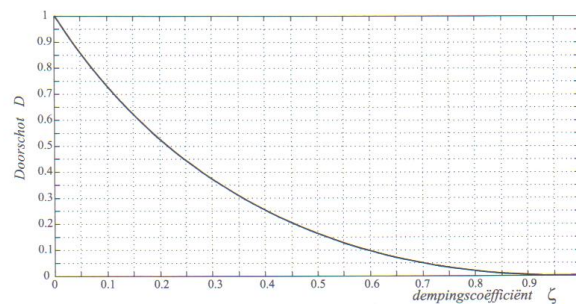
In het geval van tweede orde systemen die zich oscillerend gedragen zien we in de grafiek toch een aantal belangrijke parameters



Figuur 3.17: bron: 'Regeltechniek'; J.Cools, Elsevier

- Het doorschot: Dit is de maximale waarde die het systeem bereikt en is een maat waarmee het stapantwoord de eindwaarde overschrijdt. Het doorschot kan berekend worden en men stelt vast dat dit enkel afhangt van de demping.
- Uitslingertijd of settling time: Dit is de tijd die het systeem nodig heeft om tot binnen een band van vijf procent van de eindwaarde te blijven

Onderstaande figuur geeft het verband weer tussen doorschot en dempingscoëfficiënt



Figuur 3.18: bron: 'Regeltechniek'; J.Cools, Elsevier

3.6.2 Sinusresponsie van een tweede orde systeem

Weerom gebruiken we de standaardprocedure, vervangen s door $j\omega$ en berekenen modulus en argument. Modulus wordt

$$M = \frac{1}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega\omega_n)^2}}$$

Argument wordt

$$\varphi = -\arctan\left(\frac{2\zeta\omega\omega_n}{\omega_n^2 - \omega^2}\right)$$

(a) Voor lage frequenties hebben we

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} 20 \log M = \frac{1}{\omega_n^2}$$

(b) Voor hoge frequenties hebben we

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} 20 \log M = -\infty$$

(c) De overgang van 0 naar oneindig moet weer op een breekpunt gebeuren. In het geval van tweede orde systemen gebeurt de overgang op de resonantiefrequentie dus op ω_n

$$\varphi = -90^\circ$$

$$M = \frac{1}{2\zeta\omega_n^2}$$

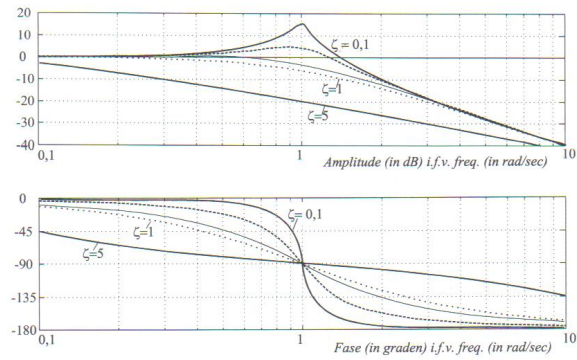
Er moet nog opgemerkt worden dat op de helling van de rechten in het Bodediagram moet gelet worden. Deze zal nu 40dB per decade afnemen. Anders gesteld per orde zal de helling één decade afnemen. Onderstaande figuur geeft het Bodediagram van tweede orde systemen.

Ook in het geval van sinusresponsies zien we dat de dempingsfactor een grote rol speelt in het gedrag.

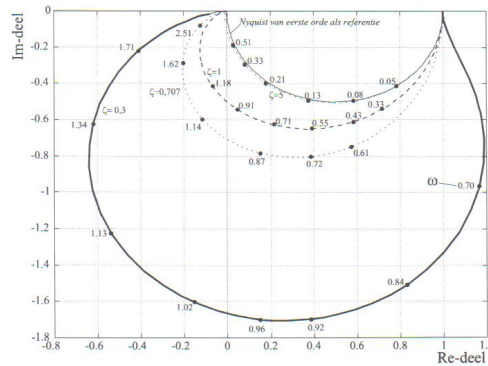
Onderstaande figuur geeft het Nyquistdiagram weer van tweede ordesystemen

3.7 Systemen met dode tijd

Een systeem met dode tijd is een systeem waar een looptijd in verwerkt is en die eigenlijk niets verandert in het systeem behalve aanwezig zijn. Dus er verloopt een periode tussen het aanleggen van hetingangssignaal en de eerste reactie van het systeem hierop. Dit heeft tot onmiddellijk gevolg dat zulk systeem, vermits het niet deelneemt aan het proces ook niet kan



Figuur 3.19: bron: 'Regeltechniek'; J.Cools, Elsevier



Figuur 3.20: bron: 'Regeltechniek'; J.Cools, Elsevier

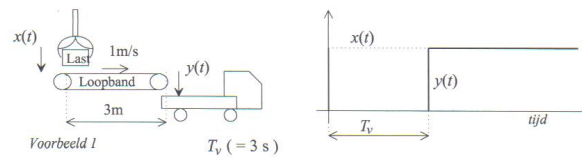
weg geregeld worden. Een klassiek voorbeeld hiervan is een transportband die een produkt transporteert dat later in een vat valt waar dit produkt zal deelnemen aan een reactie.

Een looptijd is eigenlijk een verschuiving in het tijdsgebied. Hierdoor kunnen we dus het verschuivingstheorema van de Laplacetransformatie gebruiken

$$f(t - a) = F(s)e^{-as}$$

Als in het systeem dus een vertraging T_v optreedt vinden we aan de uitgang volgend signaal terug

$$Y(s) = X(s)e^{-T_v s}$$



Figuur 3.21: bron: 'Regeltechniek'; J.Cools, Elsevier

3.7.1 Stapresponsie van een systeem met dode tijd

Voor de stapresponsie valt er weinig meer te zeggen want fysisch gaat het gewoon over een verschuiving in de tijd. Dus een stap aan de ingang wordt dezelfde stap aan de uitgang met een zekere tijdsvertraging.

3.7.2 Sinusresponsie van een systeem met dode tijd

De transfertfunctie wordt gegeven door $H(s) = e^{-T_v s}$. We vervangen s door $j\omega$ en krijgen een e-macht met complexe macht. Deze kan omgezet worden in een som van een sinus en een cosinus-functie dus

$$H(s) = \cos(\omega T_v) - j \sin(\omega T_v)$$

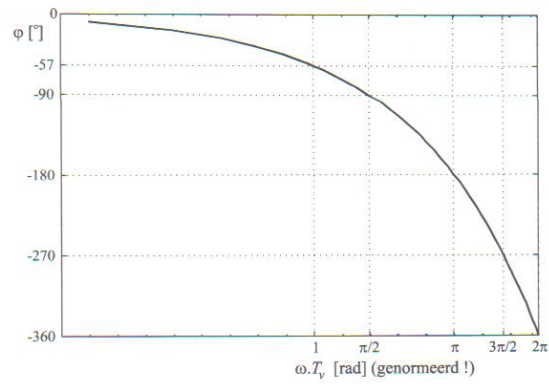
De modulus wordt

$$M = \sqrt{\cos^2(\omega T_v) + \sin^2(\omega T_v)} = 1$$

Dit is duidelijk een constante. Het argument wordt

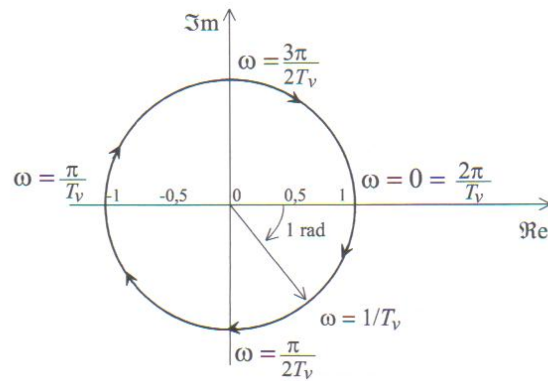
$$\varphi = \arctan\left(\frac{-\sin \omega T_v}{\cos \omega T_v}\right) = -\omega T_v$$

Het bodediagram bevat dus enkel een fasegedeelte



Figuur 3.22: bron: 'Regeltechniek'; J.Cools, Elsevier

Voor het Nyquistdiagram bekomt men een cirkel want men heeft een constante amplitude dit wil zeggen constante straal en de fase doorloopt alle waarden dus de hele cirkel



Figuur 3.23: bron: 'Regeltechniek'; J.Cools, Elsevier