



HOGERE ZEEVAARTSCHOOL ANTWERPEN

FACULTEIT WETENSCHAPPEN
VAKGROEP TOEGEPASTE EN EXACTE WETENSCHAPPEN

INTEGRAALREKENING 2

D. AERTS, P. BUEKEN, D. LUYCKX

INHOUDSTAFEL

Inhoudstafel	3
1 Differentiaalvergelijkingen	5
2 Laplace-transformatie	19
3 Fourier-reeksen	23
4 Dubbelintegralen	25
5 Beschrijvende statistiek	29

GEBRUIKTE SYMBOLEN

- ⊗ Dit zijn eenvoudige oefeningen, in de eerste plaats bedoeld om de nodige basistechnieken in te oefenen.
- ⊗⊗ Dit is een iets moeilijker oefening, die iets meer inzicht vraagt.
 - ▣ Oefeningen met de hoogste moeilijkheidsgraad, vergelijkbaar met examenoefeningen.
 - ☆ Dit zijn examenoefeningen van de voorbije jaren.
 - ▶ Deze oefeningen dien je op te lossen als voorbereiding op het labo. Je brengt je oplossing, of een neerslag van je pogingen, mee naar het labo.
- Ⓢ Deze oefeningen worden in het aangegeven labo behandeld.

HOOFDSTUK 1

DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN

► 1.1. Bepaal de orde van de volgende differentiaalvergelijkingen.

1. $y' + 3y = \sin x$
2. $y' + xy^2 = \sin x + \cos^3 x$
3. $(y')^2 + 3y^7 = x^4 e^x$
4. $y'' + 3y' + 5y = \sin x$
5. $(y'')^3 (y')^4 + 3x^7 y^4 (y')^2 + 5y^9 = \sin x^{10}$

► 1.2. Schrijf volgende differentiaalvergelijkingen (van eerste orde) in de alternatieve vorm. Bepaal het type van de differentiaalvergelijking.

- | | | |
|---|---|--|
| 1. $y' = \frac{x}{y}$ | 4. $y' = \frac{x^2 + 3xy + y^2}{2x^2 + xy + y^2}$ | 7. $xy' + e^x y + \operatorname{tg} x = 0$ |
| 2. $y' = \frac{y}{x}$ | 5. $y' = -\frac{3x^2 + 10xy + 3y^2}{5x^2 + 6xy + 3y^2}$ | 8. $x^2 dx + y^4 dy = 0$ |
| 3. $y' = \frac{ye^x}{\operatorname{tg} x \cos y}$ | 6. $y' + 6 \sin xy = e^x$ | 9. $x^2 y^3 dx + e^x \sin y dy = 0$ |
| | | 10. $(x^2 + y^2) dx + 2xy dy = 0$ |

© 1.3. (Labo C15) Los de volgende differentiaalvergelijkingen op.

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{x\sqrt{1-y^2}}{y\sqrt{1-x^2}}$
2. $(1-y^2)xdy - (1+x^2)ydx = 0, \quad y(1) = 1$
3. $\frac{dz}{dt} + \frac{1+z^3}{tz^2(1+t^2)} = 0$
4. $2xydy = (x^2 + y^2)dx$
5. $\frac{dy}{dx} = -\frac{x+y}{x}$
6. $-(2xy+x)dx = (x^2+y)dy, \quad y(1) = 2$
7. $(y \sin x + xy \cos x)dx + (x \sin x + 1)dy = 0$
8. $\frac{dy}{dt} - \frac{2}{t}y = t^3, \quad t > 0, \quad y(1) = 2$
9. $\frac{dy}{dx} + y = e^x, \quad y(0) = 2$
10. $\frac{dy}{dx} - y = x - 2, \quad y(0) = 3$
11. $\frac{dy}{dx} + y \cotg x = 5e^{\cos x}$
12. $(1+e^x)y \frac{dy}{dx} = e^x, \quad y(0) = 1$
13. $\frac{dy}{2dx} + \frac{y}{x} = 3x^3, \quad y(1) = -1$
14. $(x^2 + y)dx + (y^3 + x)dy = 0$
15. $dy + (3y - 2)dx = 0$
16. $(x^2 - 2y^2)dy + 2xydx = 0, \quad y(2) = 1$
17. $\frac{dy}{xdx} - y = 1$
18. $(x + e^{-x} \sin y)dx - (y + e^{-x} \cos y)dy = 0$

© 1.4. (Labo C15) Een bacterie vermenigvuldigt zich met een snelheid die op elk moment evenredig is met het aantal aanwezige bacteriën. Als er na 3 uur 10^4 bacteriën zijn en na 5 uur $4 \cdot 10^4$, bepaal dan het aantal bacteriën bij het begin.

- ⊙ **1.5.** (Labo C15) In hoeveel tijd zal een voorwerp van 100°C afkoelen tot 30°C , als de kamertemperatuur constant op 20°C blijft en het voorwerp in de eerste 20 minuten afkoelt tot 60°C ? De temperatuursverandering van het voorwerp is evenredig met het temperatuursverschil tussen voorwerp en kamer.

⊗⊗ **1.6.** Los de volgende differentiaalvergelijkingen op.

- | | |
|-------------------------------------|---|
| 1. $ydy - 4xdx = 0$ | 7. $ydx - xdy = 0$ |
| 2. $y^2dy - 3x^5dx = 0$ | 8. $(1 + y)dx - (1 - x)dy = 0$ |
| 3. $x^3y' = y^2(x - 4)$ | 9. $y' = \frac{1 + y^2}{1 + x^2}$ |
| 4. $xy^2(1 + x^2)y' + y^3 + 1 = 0$ | 10. $\sqrt{1 - x^2}dy = \sqrt{1 - y^2}dx$ |
| 5. $(1 + x^2)y' = 1 + y^2$ | 11. $3e^x \operatorname{tg} y dx + \frac{1 - e^x}{\cos^2 y} dy = 0$ |
| 6. $y' = \frac{\cos^2 y}{\sin^2 x}$ | 12. $(x - y^2x)dx + (y - x^2y)dy = 0$ |

⊗⊗ **1.7.** Los de volgende differentiaalvergelijkingen op.

1. $2xydy = (x^2 - y^2)dx$
2. $x \sin \frac{y}{x}(ydx + xdy) + y \cos \frac{y}{x}(xdy - ydx) = 0$
3. $(x^2 - 2y^2)dy + 2xydx = 0$
4. $(x - 2y)dy + (y + 4x)dx = 0$
5. $y' = \frac{x^2 + y^2}{2xy}$
6. $(x + y)dx = (x - y)dy$
7. $x(x + y)dy = y^2dx$

⊗⊗ **1.8.** Los de volgende differentiaalvergelijkingen op.

- | | |
|--|---|
| 1. $(x^2 + y)dx + (y^3 + x)dy = 0$ | 4. $(x^2 + y)dx + (x - 2y)dy = 0$ |
| 2. $(x + e^{-x} \sin y)dx = (y + e^{-x} \cos y)dy$ | 5. $(y^3 - x)y' = y$ |
| 3. $xdy + (y + 2x^3)dx = 0$ | 6. $2(3xy^2 + 2x^3)dx + 3(2x^2y + y^2)dy = 0$ |

☼☼ 1.9. Los de volgende differentiaalvergelijkingen op.

- | | |
|---|---|
| 1. $y' = 3y + e^{2x}$ | 7. $xdy + (3y - e^x)dx = 0$ |
| 2. $y' - xy = x$ | 8. $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$ |
| 3. $\operatorname{tg} xy' + y = \frac{1}{\cos x}$ | 9. $y' - \frac{n}{x}y = e^x x^n$ |
| 4. $y' + \frac{2}{x}y = 6x^3$ | 10. $y' + y = e^{-x}$ |
| 5. $xy' - y = 2x^3$ | 11. $y' + \cos xy = \frac{1}{2} \sin 2x$ |
| 6. $xy' + y = 2x^2y$ | 12. $(x - x^3)y' + (2x^2 - 1)y - x^3 = 0$ |

☆ 1.10. Los de volgende differentiaalvergelijkingen op.

1. $y' - 5y = 80xe^x$
2. $y' = \frac{e^{-y}}{(1+x^2)\cos y}$
3. $y' - 10y = e^{10x}$
4. $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\arcsin y}$
5. $y' + 3y = 26\cos 2x$
6. $y' = \frac{\sqrt{x}(y^2+1)}{x+1}$
7. $y' + 3x^2y = 3x^2\cos(x^3)$
8. $xy' + 3y = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$
9. $xy' + 3y = \sin 2x$
10. $(x+3)y' - \frac{4}{x-1}y = x^2 - x$
11. $tz' + 2z = \sin t, \quad z\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
12. $\frac{1}{x}y' + 2y = 24x^2, \quad y(0) = 5$
13. $\frac{1}{x^2}y' + 3y = 24x^3, \quad y(0) = 5$
14. $xy' + 4y = \frac{x+5}{x(x^2-1)}$
15. $(x-3)(x+5)y' + 8y = 4(x+5)^2$

© 1.11. (Labo C16) Los de volgende differentiaalvergelijkingen op.

1. $\frac{d^2y}{dx^2} + 4 \sin 3x = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1$
2. $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x}$
3. $x \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = x^2$
4. $(1 + x^2)y'' - 2xy' = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3$
5. $\frac{d^2y}{dx^2} + 3 \frac{dy}{dx} + 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$
6. $\frac{d^2y}{dx^2} - 9y = 0$
7. $\frac{d^2y}{dx^2} - 5 \frac{dy}{dx} + 4y = 0, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = 8$
8. $\frac{d^2y}{dx^2} - 6 \frac{dy}{dx} + 9y = 0$
9. $\frac{d^2y}{dx^2} + 4 \frac{dy}{dx} + 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
10. $\frac{y' - y}{y''} = 3$
11. $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$
12. $x(y'' + 1) + y' = 0$
13. $y'' + 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$
14. $-e^{3x} \frac{d^2y}{dx^2} = 3(e^{6x} + 1), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$
15. $7y'' + 6y' - y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 2$

⊗⊗ 1.12. Los de volgende differentiaalvergelijkingen op.

1. $y'' = -xe^x - \cos x$
2. $y'' = 3x + 2$
3. $e^{2x}y'' = 4(e^{4x} + 1)$
4. $y'' = -9 \sin 3x$
5. $\frac{d^2s}{dt^2} = g$
6. $xy'' = 2$

⊗⊗ 1.13. Los de volgende differentiaalvergelijkingen op.

1. $x^2 y'' + xy' = 1$
2. $xy'' + y' + x = 0$
3. $xy'' - 3y' + 4x = 0$
4. $y'' - y' = 2x - x^2$
5. $xy'' - y' = 8x^3$
6. $xy'' - y' = x^2 e^x$
7. $y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x$

⊗⊗ 1.14. Los de volgende differentiaalvergelijkingen op.

- | | |
|-------------------------|--------------------------|
| 1. $y'' - 3y' + 2y = 0$ | 7. $y'' - 4y' + 5y = 0$ |
| 2. $y'' + 5y' + 6y = 0$ | 8. $y'' + 4y' + 3y = 0$ |
| 3. $y'' - y' = 0$ | 9. $y'' - 4y = 0$ |
| 4. $y'' - 2y' + y = 0$ | 10. $y'' + 2y' - 3y = 0$ |
| 5. $y'' + 9y = 0$ | 11. $y'' + 4y = 0$ |
| 6. $y'' - 2y' + 5y = 0$ | 12. $y'' + 2y' + y = 0$ |

⊙ 1.15. (Labo C17) Los de volgende differentiaalvergelijkingen op.

1. $\frac{d^2 y}{dx^2} - 8 \frac{dy}{dx} + 7y = 14$
2. $\frac{d^2 y}{dx^2} + 3 \frac{dy}{dx} - 4y = 8x + 6, \quad y(0) = -3, \quad y'(0) = 4$
3. $\frac{d^2 y}{dx^2} - 4 \frac{dy}{dx} + 4y = 3x^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$
4. $\frac{d^2 y}{dx^2} + 9y = 6e^{3x}, \quad y(0) = \frac{4}{3}, \quad y'(0) = 7$
5. $\frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} + 3y = e^{-x} \cos x$
6. $\frac{d^2 y}{dx^2} - 7 \frac{dy}{dx} + 12y = x, \quad y(0) = \frac{151}{144}, \quad y'(0) = \frac{37}{12}$
7. $y'' + 9y = 3 \cos 3x$
8. $\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = 3e^{2x}$

☞☞ 1.16. Los de volgende differentiaalvergelijkingen op.

- | | |
|---------------------------------|-------------------------------------|
| 1. $y'' + 9y = (x^2 + 1)e^{3x}$ | 7. $y'' - y = 5x + 2$ |
| 2. $y'' - y = e^x$ | 8. $y'' - 3y' = 2 - 6x$ |
| 3. $y'' - 9y = (x^2 + 1)e^{3x}$ | 9. $y'' + 4y = 2 \sin 2x$ |
| 4. $y'' + 2y' + y = x^2 e^{-x}$ | 10. $y'' + 4y' + 3y = 6x + 23$ |
| 5. $y'' - 7y' + 12y = x$ | 11. $y'' + 4y = e^{3x}$ |
| 6. $y'' + y' - 2y = 8 \sin 2x$ | 12. $y'' - y = \cos 2x - 2 \sin 2x$ |

☆ 1.17. Los de volgende differentiaalvergelijkingen op.

- | | |
|---|--|
| 1. $y'' - 3y' + 2y = 10x \sin x - 5 \sin x + \cos x$ | 12. $y'' + 4y' + 13y = 50xe^{-x}$,
$y(0) = 1, y'(0) = 5$ |
| 2. $y'' - 3y' + 2y = 4xe^{2x}$ | 13. $y'' - 9y' + 20y = 580 \cos(2x)$,
$y(0) = 20, y'(0) = -18$ |
| 3. $y'' - 4y' + 4y = 10e^{2x}$ | 14. $y'' - 2y' + y = \cos t$,
$y(0) = y'(0) = 0$ |
| 4. $y'' - 5y' + 6y = 10e^{2x}$ | 15. $y'' - 6y' + 8y = 14e^{4x}$,
$y(0) = 3, y'(0) = 17$ |
| 5. $y'' + 3y' - 18y = 324xe^{3x}$ | 16. $y'' - 5y' + 6y = 11e^{3x}$,
$y(0) = -5, y'(0) = 6$ |
| 6. $y'' + 2y' - 24y = 200xe^{4x}$ | 17. $y'' - 2y' + 5y = 20t^3 - 19t^2$,
$y(0) = -1, y'(0) = 1$ |
| 7. $y'' + 5y' + 6y = 170e^x \sin x$ | |
| 8. $y'' - 2y' + 5y = 20t^3 - 19t^2$,
$y(0) = -1, y'(0) = 1$ | |
| 9. $y'' + 3y' - 18y = 324xe^{3x}$ | |
| 10. $y'' + 2y' - 24y = 200xe^{4x}$ | |
| 11. $y'' - y' - 6y = 52 \sin 2t$,
$y(0) = 4, y'(0) = -11$ | |

Oplossingen - Solutions
1.1.

1. 1 (y')
2. 1 (y')
3. 1 (y')
4. 2 (y'')
5. 2 (y'')

1.2.

1. $x dx - y dy = 0$, gescheiden veranderlijken/variables séparées
2. $y dx - x dy = 0$, scheidbare veranderlijken/variables séparables
3. $ye^x dx - \operatorname{tg} x \cos y dy = 0$, scheidbare veranderlijken/variables séparables
4. $(x^2 + 3xy + y^2)dx - (2x^2 + xy + y^2)dy = 0$, homogene differentiaalvergelijking/équation
5. $(3x^2 + 10xy + 3y^2)dx + (5x^2 + 6xy + 3y^2)dy = 0$, homogene differentiaalvergelijking/équation
6. $(6y \sin x - e^x)dx + dy = 0$, lineaire differentiaalvergelijking/équation différentielle linéaire
7. $(e^x y + \operatorname{tg} x)dx + x dy = 0$, lineaire differentiaalvergelijking/équation différentielle linéaire
8. $y' = -\frac{x^2}{y^4}$, gescheiden veranderlijken/variables séparées
9. $y' = -\frac{x^2 y^3}{e^x \sin y}$, scheidbare veranderlijken/variables séparables
10. $y' = -\frac{x^2 + y^2}{2xy}$, homogene differentiaalvergelijking/équation homogène
totale vergelijking/différentielle totale

1.3.

1. $\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-y^2} = C$
2. $\ln|y| - \frac{y^2}{2} = \ln|x| + \frac{x^2}{2} - 1$
3. $\frac{t\sqrt[3]{1+z^3}}{\sqrt{1+t^2}} = C$
4. $y^2 = x^2 - Cx$
5. $y = \frac{C}{x} - \frac{x}{2}$
6. $y^2 + 2yx^2 + x^2 = 9$
7. $C = y(x \sin x + 1)$
8. $y = \frac{t^4}{2} + \frac{3}{2}t^2$
9. $y = \frac{1}{2}(e^x + 3e^{-x})$
10. $y = 2e^x - x + 1$
11. $y = \frac{-5e^{\cos x} + C}{\sin x}$
12. $2e^{\frac{y^2}{2}} = \sqrt{e}(1 + e^x)$
13. $y = x^4 - \frac{2}{x^2}$
14. $\frac{x^3}{3} + \frac{y^4}{4} + xy = C$
15. $3y = 2 + Ce^{-3x}$
16. $y(3x^2 - 2y^2) = 10$
17. $y = Ce^{\frac{x^2}{2}} - 1$
18. $\frac{x^2}{2} - e^{-x} \sin y - \frac{y^2}{2} = C$

1.4.

1250

1.5. 1 uur - 1 heure

1.6.

- | | |
|--|--|
| 1. $y^2 = 4x^2 + C$ | 7. $y = Cx$ |
| 2. $2y^3 = 3x^6 + C$ | 8. $y = \frac{-x + C}{x - 1}$ |
| 3. $y = \frac{x^2}{Cx^2 + x - 2}$ | 9. $\operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} x + C$ |
| 4. $y^3 = \frac{C(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}}{x^3} - 1$ | 10. $\arcsin y = \arcsin x + C$ |
| 5. $\operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} x + C$ | 11. $y = \operatorname{arctg} C(1 - e^x)^3$ |
| 6. $\operatorname{tg} y = -\operatorname{cotg} x + C$ | 12. $y^2 = \frac{C + x^2}{x^2 - 1}$ |

1.7.

- | | |
|-------------------------------|---|
| 1. $y^2 = \frac{C + x^3}{3x}$ | 5. $y^2 = x^2 + Cx$ |
| 2. $xy \sin \frac{y}{x} = C$ | 6. $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \frac{1}{2} \ln x^2 + y^2 = C$ |
| 3. $3x^2y - 2y^3 = C$ | 7. $\ln y + \frac{y}{x} = C$ |
| 4. $4x^2 + 2xy - 2y^2 = C$ | |

1.8.

- | | |
|--|------------------------------------|
| 1. $\frac{1}{3}x^3 + xy + \frac{1}{4}y^4 = C$ | 4. $\frac{1}{3}x^3 + xy - y^2 = C$ |
| 2. $\frac{1}{2}x^2 - e^{-x} \sin y - \frac{1}{2}y^2 = C$ | 5. $xy - \frac{1}{4}y^4 = C$ |
| 3. $y = \frac{C}{x} - \frac{1}{2}x^3$ | 6. $3x^2y^2 + x^4 + y^3 = C$ |

1.9.

- | | |
|----------------------------------|---|
| 1. $y = -e^{2x} + Ce^{3x}$ | 7. $y = x^{-1}e^x - 2x^{-2}e^x + 2x^{-3}e^x + Cx^{-3}$ |
| 2. $y = -1 + Ce^{\frac{x^2}{2}}$ | 8. $y = (x + 1)^2 \left(\frac{x^2}{2} + x + C \right)$ |
| 3. $y = \frac{x + C}{\sin x}$ | 9. $y = x^n e^x + Cx^n$ |
| 4. $y = \frac{x^6 + C}{x^2}$ | 10. $y = xe^{-x} + Ce^{-x}$ |
| 5. $y = x^3 + Cx$ | 11. $y = \sin x - 1 + Ce^{-\sin x}$ |
| 6. $y = \frac{Ce^{x^2}}{x}$ | 12. $y = x + Cx\sqrt{1 - x^2}$ |

1.10.

1. $y = -20xe^x - 5e^x + Ce^{5x}$
2. $\frac{1}{2}e^y \cos y + \frac{1}{2}e^y \sin y - \operatorname{arctg} x = C$
3. $y = xe^{10x} + Ce^{10x}$
4. $y \operatorname{arcsin} y + \sqrt{1 - y^2} - \operatorname{arcsin} x = C$
5. $y = 4 \sin 2x + 6 \cos 2x + Ce^{-3x}$
6. $y = \operatorname{tg}(2\sqrt{x} - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x} + C)$
7. $y = \frac{1}{2} \cos x^3 + \frac{1}{2} \sin x^3 + Ce^{-x^3}$
8. $y = \frac{2 \operatorname{arcsin} \frac{x}{2}}{x^3} - \frac{\sqrt{4 - x^2}}{2x^2} + \frac{C}{x^3}$
9. $y = -\frac{1}{2x} \cos 2x + \frac{1}{2x^2} \sin 2x + \frac{1}{4x^3} \cos 2x + \frac{C}{4x^3}$
10. $y = \frac{x^3 - x^2 + Cx - C}{2(x + 3)}$
11. $z = -\frac{1}{t} \cos t + \frac{1}{t^2} \sin t - \frac{1}{t^2}$
12. $y = 12x^2 - 12 + 17e^{-x^2}$
13. $y = 8x^3 - 8 + 13e^{-x^3}$
14. $y = \frac{1}{2x^2} + \frac{5}{x^3} + \frac{3 \ln |x - 1| - 2 \ln |x + 1| + C}{x^4}$
15. $y = \frac{(4x + C)(x + 5)}{(x - 3)}$

1.11.

1. $y = \frac{4}{9} \sin 3x - \frac{1}{3}x + 2$
2. $y = x \ln |x| - x - C_1x + C_2$
3. $y = \frac{x^3}{9} + C_1 \ln |x| + C_2$
4. $y = x^3 + 3x$
5. $y = e^{-x}$
6. $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x}$
7. $y = e^{4x} + 4e^x$
8. $y = e^{3x}(C_1x + C_2)$
9. $y = xe^{-2x}$
10. $y = e^{\frac{t}{6}}(C_1 \cos \frac{\sqrt{11}}{6}t + C_2 \sin \frac{\sqrt{11}}{6}t)$
11. $y = \sin 2x$
12. $y = -\frac{x^2}{4} + C_1 \ln |x| + C_2$
13. $y = e^{-3x} + 5xe^{-3x}$
14. $3y = -e^{-3x} - e^{-3x} + 6x + 5$
15. $y = -\frac{11}{8}e^{-x} + \frac{35}{8}e^{\frac{x}{7}}$

1.12.

- | | |
|--|-----------------------------------|
| 1. $y = \cos x - xe^x + 2e^x + Cx + D$ | 4. $y = \sin 3x + Cx + D$ |
| 2. $y = \frac{1}{2}x^3 + x^2 + Cx + D$ | 5. $s = \frac{1}{2}gt^2 + Ct + D$ |
| 3. $y = e^{2x} + e^{-2x} + Cx + D$ | 6. $y = 2x \ln x + Cx + D$ |

1.13.

- | | |
|--|--|
| 1. $y = \frac{1}{2} \ln^2 x + C \ln x + D$ | 5. $y = x^4 + Cx^2 + D$ |
| 2. $y = -\frac{1}{4}x^2 + C \ln x + D$ | 6. $y = xe^x - e^x + Cx^2 + D$ |
| 3. $y = x^2 + Cx^4 + D$ | 7. $y = -x - \sin x \cos x + C \sin x + D$ |
| 4. $y = \frac{1}{3}x^3 + Ce^x + D$ | |

1.14.

1. $y = Ae^x + Be^{2x}$
2. $y = Ae^{-2x} + Be^{-3x}$
3. $y = A + Be^x$
4. $y = Ae^x + Bxe^x$
5. $y = A \cos 3x + B \sin 3x$
6. $y = Ae^x \cos 2x + Be^x \sin 2x$
7. $y = Ae^{2x} \sin x + Be^{2x} \cos x$
8. $y = Ae^{-3x} + Be^{-x}$
9. $y = Ae^{2x} + Be^{-2x}$
10. $y = Ae^x + Be^{-3x}$
11. $y = A \cos 2x + B \sin 2x$
12. $y = Ae^{-x} + Bxe^{-x}$

1.15.

1. $y = C_1 e^{7x} + C_2 e^x + 2$
2. $y = \frac{6}{5}e^x - \frac{6}{5}e^{-4x} - 2x - 3$
3. $y = \left(-\frac{1}{8} + \frac{3}{4}x\right)e^{2x} + \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{8}$
4. $y = \cos 3x + 2 \sin 3x + \frac{1}{3}e^{3x}$
5. $y = e^x(C_1 \cos \sqrt{2}x + C_2 \sin \sqrt{2}x) + \frac{1}{41}e^{-x}(5 \cos x - 4 \sin x)$
6. $y = e^{3x} + \frac{1}{12}x + \frac{7}{144}$
7. $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + \frac{1}{2}x \sin 3x$
8. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x} + \frac{3}{5}x e^{2x}$

1.16.

1. $y = A \sin 3x + B \cos 3x + \frac{1}{162}(9x^2 - 6x + 10)e^{3x}$
2. $y = Ae^{-x} + Be^x + \frac{1}{2}xe^x$
3. $y = Ae^{3x} + Be^{-3x} + \frac{1}{108}(6x^2 - 3x^2 + 19x)e^{3x}$
4. $y = Ae^{-x} + Bxe^{-x} + \frac{1}{12}x^4 e^{-x}$
5. $y = Ae^{4x} + Be^{3x} + \frac{1}{12}x + \frac{7}{144}$
6. $y = Ae^x + Be^{-2x} - \frac{2}{5} \cos 2x - \frac{6}{5} \sin 2x$
7. $y = Ae^x + Be^{-x} - 5x - 2$
8. $y = Ae^{3x} + B + x^2$
9. $y = A \sin 2x + B \cos 2x - \frac{1}{2}x \cos 2x$
10. $y = Ae^{-x} + Be^{-3x} + 2x + 5$
11. $y = A \sin 2x + B \cos 2x + \frac{1}{13}e^{3x}$
12. $y = Ae^x + Be^{-x} - \frac{1}{5} \cos 2x + \frac{2}{5} \sin 2x$

1.17.

1. $y = Ae^x + Be^{2x} + 3x \cos x + x \sin x - 2 \sin x + 2 \cos x$
2. $y = Ae^x + Be^{2x} + 2x^2e^{2x} - 4xe^{2x}$
3. $y = Ae^{2x} + Bxe^{2x} + 5x^2e^{2x}$
4. $y = Ae^{2x} + Be^{3x} - 10xe^{2x}$
5. $y = Ae^{3x} + Be^{-6x} + 18x^2e^{3x} - 4xe^{3x}$
6. $y = Ae^{4x} + Be^{-6x} + 10x^2e^{4x} - 2xe^{4x}$
7. $y = Ae^{-2x} + Be^{-3} - 7e^x \cos x + 11e^x \sin x$
8. $y = e^t \cos 2t + 2e^t \sin 2t + 4t^3 + t^2 - 4t - 2$
9. $y = Ae^{3x} + Be^{-6x} + 18x^2e^{3x} - 4xe^{3x}$
10. $y = Ae^{4x} + Be^{-6x} + 10x^2e^{4x} - 2xe^{4x}$
11. $y = 2e^{-2t} + e^{3t} + \cos 2t - 5 \sin 2t$
12. $y = e^{-2x} \sin 3x + 2e^{-2x} \cos 3x + 5xe^{-x} - e^{-x}$
13. $y = 2e^{4x} + 2e^{5x} + 16 \cos 2x - 18 \sin 2x$
14. $y = \frac{1}{2}te^t - \frac{1}{2} \sin t$
15. $y = 7xe^{4x} + 2e^{4x} + e^{2x}$
16. $y = 11xe^{3x} + 5e^{3x} - 10e^{2x}$
17. $y = 2e^t \sin 2t + e^t \cos 2t + 4t^3 + t^2 - 4t - 2$

HOOFDSTUK 2

LAPLACE-TRANSFORMATIE

© **2.1.** (Labo C17) Los de volgende differentiaalvergelijkingen op met behulp van de Laplace-transformatie.

1. $x' - x = 3t + 5, \quad x(0) = -8$
2. $x' - x = \sin t - \cos t, \quad x(0) = 0$
3. $x'' - x' = 0, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1$
4. $y'' - y = e^x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
5. $y'' + 9y = 6e^{3x}, \quad y(0) = \frac{4}{3}, \quad y'(0) = 7$

⊗⊗ **2.2.** Los de volgende differentiaalvergelijkingen op met behulp van de Laplace-transformatie.

1. $x'' + 9x = 1, \quad x(0) = x'(0) = 0$
2. $x'' + 3x' + 2x = t, \quad x(0) = x'(0) = 0$
3. $x'' + 2x' + 5x = \sin t, \quad x(0) = x'(0) = 0$
4. $x'' + 4x = \sin 3t, \quad x(0) = x'(0) = 0$
5. $x'' + 3x' + 2x = 0, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 2$
6. $x'' - 3x' + 2x = e^{5t}, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 2$

☆ **2.3.** Los de volgende differentiaalvergelijkingen op met behulp van de Laplace-transformatie.

- | | |
|---|---|
| 1. $y' + y = 2e^x, \quad y(0) = 0$ | 5. $y' - 5y = 25x, \quad y(0) = 1$ |
| 2. $y' + 4y = 25 \sin 3x, \quad y(0) = 0$ | 6. $y' + 5y = 29 \sin 2x, \quad y(0) = 5$ |
| 3. $y' - y = e^{2x}, \quad y(0) = 2$ | 7. $y' - 3y = 4e^{5x}, \quad y(0) = 1$ |
| 4. $y' + y = x^2, \quad y(0) = 0$ | 8. $y' - 3y = 10 \sin x, \quad y(0) = 4$ |
| | 9. $y' - 10y = 500x^2, \quad y(0) = 1$ |

☆ **2.4.** Los de volgende differentiaalvergelijkingen op met behulp van de Laplace-transformatie.

1. $y'' + 2y' - 24y = 400 \sin(2x), \quad y(0) = 8, \quad y'(0) = 2$
2. $y'' + 3y' - 18y = 360 \cos(3x), \quad y(0) = -5, \quad y'(0) = -12$
3. $y'' - 8y' + 15y = 4e^{5x}, \quad y(0) = y'(0) = 0$
4. $y'' - 4y' + 4y = 8 \sin 2x, \quad y(0) = y'(0) = 0$
5. $y'' - 2y' + 2y = 5 \sin x, \quad y(0) = y'(0) = 0$

Oplossingen - Solutions

2.1.

1. $x = -3t - 8$
2. $x = -\sin t$
3. $x = e^t - 1$
4. $y = \frac{1}{4}e^x + \frac{3}{4}e^{-x} + \frac{1}{2}xe^x$
5. $y = \frac{1}{3}e^{3x} + \cos 3x + 2 \sin 3x$

2.2.

1. $\frac{1}{9}(1 - \cos 3x)$
2. $\frac{1}{2}x - \frac{3}{4} - \frac{1}{4}e^{-2x} + e^{-x}$
3. $-\frac{1}{20}e^{-x} \sin 2x + \frac{1}{10}e^{-x} \cos 2x + \frac{1}{5} \sin x - \frac{1}{10} \cos x$
4. $\frac{3}{10} \sin 2x - \frac{1}{5} \sin 3x$
5. $-3e^{-2x} + 4e^{-x}$
6. $\frac{1}{12}e^{5x} + \frac{2}{3}e^{2x} + \frac{1}{4}e^x$

2.3.

- | | |
|---|---|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. $e^x - e^{-x}$ 2. $-3 \cos 3x + 4 \sin 3x + 3e^{-4x}$ 3. $e^{2x} + e^x$ 4. $x^2 - 2x + 2 - 2e^{-x}$ | <ol style="list-style-type: none"> 5. $-5x - 1 + 2e^{5x}$ 6. $-2 \cos 2x + 5 \sin 2x + 7e^{-5x}$ 7. $2e^{5x} - e^{3x}$ 8. $-\cos x - 3 \sin x + 5e^{3x}$ 9. $-50x^2 - 10x - 1 + 2e^{10x}$ |
|---|---|

2.4.

1. $e^{-6x} + 9e^{4x} - 2 \cos 2x - 14 \sin 2x$
2. $5e^{-6x} + 2e^{3x} - 12 \cos 3x + 4 \sin 3x$
3. $-e^{5x} + e^{3x} + 2xe^{5x}$
4. $-e^{2x} + 2xe^{2x} + \cos 2x$
5. $e^x \sin x - 2e^x \cos x + 2 \cos x + \sin x$

HOOFDSTUK 3

FOURIER-REEKSEN

© **3.1.** (Labo C18) Bereken de Fourierreeks van de volgende periodische functies (met periode 2π).

$$1. \quad y = \begin{cases} -1, & x \in]-\pi, 0], \\ 2, & x \in]0, \pi]. \end{cases}$$

$$2. \quad y = \frac{\pi - x}{2}, \quad x \in [0, 2\pi[$$

$$3. \quad y = \frac{x^2}{4}, \quad x \in [-\pi, \pi]$$

$$4. \quad y = \begin{cases} -\cos x, & x \in]-\pi, 0], \\ +\cos x, & x \in]0, \pi]. \end{cases}$$

$$5. \quad y = \begin{cases} 0, & x \in]-\pi, 0], \\ x, & x \in]0, \pi]. \end{cases}$$

☆ **3.2.** Bereken de Fourierreeks van de volgende periodische functies (met periode 2π).

$$1. \quad y = \begin{cases} 4, & x \in]-\pi, 0], \\ -2, & x \in]0, \pi]. \end{cases}$$

$$2. \quad y = -3x, \quad x \in [0, 2\pi[$$

Oplossingen - Solutions**3.1.**

1. $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{6}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right)$
2. $f(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x + \dots$
3. $f(x) = \frac{\pi^2}{12} - \cos x + \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{9} \cos 3x + \dots$
4. $f(x) = \frac{8}{\pi} \left(\frac{1}{3} \sin 2x + \frac{2}{15} \sin 4x + \frac{3}{35} \sin 6x + \dots \right)$
5. $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \left(\cos x + \frac{1}{9} \cos 3x + \frac{1}{25} \cos 5x + \dots \right) + \left(\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x + \dots \right)$

3.2.

1. $f(x) = 1 - \frac{12}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right)$
2. $-3\pi + 6 \left(\sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x + \dots \right)$

HOOFDSTUK 4

DUBBELINTEGRALLEN

© 4.1. (Labo C17) Bereken volgende dubbelintegralen.

1. $\int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} xy \sin x dx dy$
2. $\int \int_R ye^{xy} dx dy, \quad R: 0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 1$
3. $\int_3^4 \int_1^2 \frac{1}{(x+y)^2} dy dx$

© 4.2. (Labo C17) Bereken, met behulp van een dubbelintegraal, de oppervlakte van het gebied bepaald door

$$\begin{cases} x = 1 - y^2 \\ y = x + 1 \end{cases}$$

☹☹ 4.3. Bereken, met behulp van een dubbelintegraal, de oppervlakte van het gebied bepaald door

$$\begin{cases} x^2 = 4y \\ 8y = x^2 + 16 \end{cases}$$

⊗⊗ 4.4. Bereken, met behulp van een dubbelintegraal, de oppervlakte van het gebied bepaald door

$$\begin{cases} y = \sin x \\ y = \cos x \\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

⊙ 4.5. (Labo C17) Bereken, met behulp van een dubbelintegraal, het volume van het lichaam, begrensd door

$$\begin{cases} z = 2x \\ 0 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

⊙ 4.6. (Labo C17) Bereken, met behulp van een dubbelintegraal, het volume van het lichaam, begrensd door

$$\begin{cases} z = \frac{3}{2} - \frac{x}{7} - \frac{y}{2} \\ x = 0 \\ y = -1 \\ y = 1 \\ x = 1 + y^2 \end{cases}$$

⊙ 4.7. (Labo C17) Bereken, met behulp van een dubbelintegraal, het volume van het lichaam, begrensd door

$$\begin{cases} z = 8 - x^2 - y^2 \\ -1 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

⊗⊗ 4.8. Bereken, met behulp van een dubbelintegraal, het volume van het lichaam, begrensd door

$$\begin{cases} z = 12 + y - x^2 \\ x = y^2 \\ y = x^2 \end{cases}$$

Oplossingen - Solutions

4.1.

1. $\frac{1}{2}$
2. $\frac{e^2 - 3}{2}$
3. $\ln \frac{25}{24}$

4.2.

$$\frac{9}{2}$$

4.3.

$$\frac{32}{3}$$

4.4.

$$\sqrt{2} - 1$$

4.5.

$$18$$

4.6.

$$\frac{56}{15}$$

4.7.

$$\frac{88}{3}$$

4.8.

$$\frac{569}{140}$$

HOOFDSTUK 5

BESCHRIJVENDE STATISTIEK

- ☞☞ 5.1. De bijgevoegde tabel geeft de resultaten weer van een experiment waarbij 50 mensen gemeten werden. Stel deze resultaten grafisch voor met behulp van een histogram, de frequentiepolygoon en het ogief. Bereken het gemiddelde, de mediaan en de modus van deze resultaten. Bereken de standaardafwijking van de resultaten. Bepaal D_4 , P_{10} en P_{90} . Construeer een boxplot.

Class	Abs. freq.
[150, 155[4
[155, 160[7
[160, 165[18
[165, 170[11
[170, 175[6
[175, 180[4
Tot.	50

- ☞☞ **5.2.** De bijgevoegde tabel geeft de resultaten weer van een experiment waarbij de reactietijden van 50 mensen gemeten werden (in seconden). De resultaten werden afgerond tot op een tiende van een seconde. Stel een frequentietabel op. Gebruik hiervoor klassen met een breedte van 1 seconde. Stel deze resultaten grafisch voor met behulp van een histogram, de frequentiepolygoon en het ogief. Bereken het gemiddelde, de mediaan en de modus van deze resultaten. Bereken de standaardafwijking van de resultaten. Bepaal D_4 , P_{10} en P_{90} . Construeer een boxplot.

2.0; 1.8; 2.3; 2.1; 2.0; 2.2; 2.1; 2.2; 2.1; 2.1;
2.0; 2.0; 1.8; 1.9; 2.2; 2.0; 2.2; 2.4; 2.1; 2.0;
2.2; 2.1; 2.2; 1.9; 1.7; 2.0; 2.0; 2.3; 2.1; 1.9;
2.0; 2.2; 1.6; 2.1; 2.3; 2.0; 2.0; 2.0; 2.2; 2.6;
2.0; 2.0; 1.9; 1.9; 2.2; 2.3; 1.8; 1.7; 1.7; 1.8;

- ☞☞ **5.3.** Zelfde vraag, gebruik dit keer echter klassen met een breedte van 2 seconden. Doe hetzelfde met een opdeling in klassen met een breedte van 0.5 seconde.

Oplossingen - Solutions**5.1.****5.2.****5.3.**