



HOGERE ZEEVAARTSCHOOL ANTWERPEN

FACULTEIT WETENSCHAPPEN
VAKGROEP TOEGEPASTE EN EXACTE WETENSCHAPPEN

CALCUL INTÉGRAL 2

D. AERTS, P. BUEKEN, D. LUYCKX

TABLE DES MATIÈRES

Table des matières	3
1 Equations différentielles	5
2 Transformée de Laplace	19
3 Séries de Fourier	23
4 Intégrales doubles	25
5 Statistique descriptive	29

SYMBOLES UTILISÉS

- ⊗ Exercices simples, demandant une application des techniques de base.
- ⊗⊗ Exercices légèrement plus compliquées, demandant un peu plus de compréhension des techniques.
- ⊞ Exercices du plus haut degré de difficulté, comparables aux exercices d'examen.
- ☆ Ces questions ont récemment fait partie d'un examen.
 - ▶ Ces exercices sont à résoudre comme préparation au labo. Apportez votre solution, ou au moins une "preuve" de vos essais.
- ⊙ Ces exercices seront traitées dans le labo mentionné.

CHAPITRE 1

EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

► 1.1. Déterminez l'ordre des équations différentielles suivantes.

1. $y' + 3y = \sin x$
2. $y' + xy^2 = \sin x + \cos^3 x$
3. $(y')^2 + 3y^7 = x^4 e^x$
4. $y'' + 3y' + 5y = \sin x$
5. $(y'')^3 (y')^4 + 3x^7 y^4 (y')^2 + 5y^9 = \sin x^1 0$

► 1.2. Ecrivez les équations différentielles suivantes (d'ordre un) dans la forme alternative. A quelle catégorie d'équations d'ordre un est-ce que ces équations appartiennent?

- | | | |
|---|---|--|
| 1. $y' = \frac{x}{y}$ | 4. $y' = \frac{x^2 + 3xy + y^2}{2x^2 + xy + y^2}$ | 7. $xy' + e^x y + \operatorname{tg} x = 0$ |
| 2. $y' = \frac{y}{x}$ | 5. $y' = -\frac{3x^2 + 10xy + 3y^2}{5x^2 + 6xy + 3y^2}$ | 8. $x^2 dx + y^4 dy = 0$ |
| 3. $y' = \frac{ye^x}{\operatorname{tg} x \cos y}$ | 6. $y' + 6 \sin xy = e^x$ | 9. $x^2 y^3 dx + e^x \sin y dy = 0$ |
| | | 10. $(x^2 + y^2) dx + 2xy dy = 0$ |

© 1.3. (Labo C15) Résolvez les équations différentielles suivantes.

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{x\sqrt{1-y^2}}{y\sqrt{1-x^2}}$
2. $(1-y^2)xdy - (1+x^2)ydx = 0, \quad y(1) = 1$
3. $\frac{dz}{dt} + \frac{1+z^3}{tz^2(1+t^2)} = 0$
4. $2xydy = (x^2 + y^2)dx$
5. $\frac{dy}{dx} = -\frac{x+y}{x}$
6. $-(2xy+x)dx = (x^2+y)dy, \quad y(1) = 2$
7. $(y \sin x + xy \cos x)dx + (x \sin x + 1)dy = 0$
8. $\frac{dy}{dt} - \frac{2}{t}y = t^3, \quad t > 0, \quad y(1) = 2$
9. $\frac{dy}{dx} + y = e^x, \quad y(0) = 2$
10. $\frac{dy}{dx} - y = x - 2, \quad y(0) = 3$
11. $\frac{dy}{dx} + y \cotg x = 5e^{\cos x}$
12. $(1+e^x)y \frac{dy}{dx} = e^x, \quad y(0) = 1$
13. $\frac{dy}{2dx} + \frac{y}{x} = 3x^3, \quad y(1) = -1$
14. $(x^2 + y)dx + (y^3 + x)dy = 0$
15. $dy + (3y - 2)dx = 0$
16. $(x^2 - 2y^2)dy + 2xydx = 0, \quad y(2) = 1$
17. $\frac{dy}{xdx} - y = 1$
18. $(x + e^{-x} \sin y)dx - (y + e^{-x} \cos y)dy = 0$

© 1.4. (Labo C15) Une bactérie se multiplie avec une vitesse qui, à chaque instant, est proportionnelle au nombre de bactéries déjà présentes. Si, après 3 heures, on compte 10^4 bactéries, et après 5 heures il y en a $4 \cdot 10^4$, quelle était le nombre de bactéries au début?

⊙ **1.5.** (Labo C15) Un objet ayant une température de 100°C doit refroidir jusqu'à 30°C , dans un local dont la température reste constante à 20°C . Combien de temps faut-il prévoir, si l'objet atteint une température de 60°C après 20 minutes? La vitesse de refroidissement est, à chaque instant, proportionnelle à la différence en température entre l'objet et le local.

⊗⊗ **1.6.** Résolvez les équations différentielles suivantes.

1. $ydy - 4xdx = 0$

2. $y^2dy - 3x^5dx = 0$

3. $x^3y' = y^2(x - 4)$

4. $xy^2(1 + x^2)y' + y^3 + 1 = 0$

5. $(1 + x^2)y' = 1 + y^2$

6. $y' = \frac{\cos^2 y}{\sin^2 x}$

7. $ydx - xdy = 0$

8. $(1 + y)dx - (1 - x)dy = 0$

9. $y' = \frac{1 + y^2}{1 + x^2}$

10. $\sqrt{1 - x^2}dy = \sqrt{1 - y^2}dx$

11. $3e^x \operatorname{tg} y dx + \frac{1 - e^x}{\cos^2 y} dy = 0$

12. $(x - y^2x)dx + (y - x^2y)dy = 0$

⊗⊗ **1.7.** Résolvez les équations différentielles suivantes.

1. $2xydy = (x^2 - y^2)dx$

2. $x \sin \frac{y}{x}(ydx + xdy) + y \cos \frac{y}{x}(xdy - ydx) = 0$

3. $(x^2 - 2y^2)dy + 2xydx = 0$

4. $(x - 2y)dy + (y + 4x)dx = 0$

5. $y' = \frac{x^2 + y^2}{2xy}$

6. $(x + y)dx = (x - y)dy$

7. $x(x + y)dy = y^2dx$

⊗⊗ **1.8.** Résolvez les équations différentielles suivantes.

1. $(x^2 + y)dx + (y^3 + x)dy = 0$

2. $(x + e^{-x} \sin y)dx = (y + e^{-x} \cos y)dy$

3. $xdy + (y + 2x^3)dx = 0$

4. $(x^2 + y)dx + (x - 2y)dy = 0$

5. $(y^3 - x)y' = y$

6. $2(3xy^2 + 2x^3)dx + 3(2x^2y + y^2)dy = 0$

☞ 1.9. Résolvez les équations différentielles suivantes.

1. $y' = 3y + e^{2x}$
2. $y' - xy = x$
3. $\operatorname{tg} xy' + y = \frac{1}{\cos x}$
4. $y' + \frac{2}{x}y = 6x^3$
5. $xy' - y = 2x^3$
6. $xy' + y = 2x^2y$
7. $xdy + (3y - e^x)dx = 0$
8. $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$
9. $y' - \frac{n}{x}y = e^x x^n$
10. $y' + y = e^{-x}$
11. $y' + \cos xy = \frac{1}{2} \sin 2x$
12. $(x - x^3)y' + (2x^2 - 1)y - x^3 = 0$

☆ 1.10. Résolvez les équations différentielles suivantes.

1. $y' - 5y = 80xe^x$
2. $y' = \frac{e^{-y}}{(1+x^2)\cos y}$
3. $y' - 10y = e^{10x}$
4. $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\arcsin y}$
5. $y' + 3y = 26 \cos 2x$
6. $y' = \frac{\sqrt{x}(y^2 + 1)}{x+1}$
7. $y' + 3x^2y = 3x^2 \cos(x^3)$
8. $xy' + 3y = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$
9. $xy' + 3y = \sin 2x$
10. $(x+3)y' - \frac{4}{x-1}y = x^2 - x$
11. $tz' + 2z = \sin t, \quad z\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
12. $\frac{1}{x}y' + 2y = 24x^2, \quad y(0) = 5$
13. $\frac{1}{x^2}y' + 3y = 24x^3, \quad y(0) = 5$
14. $xy' + 4y = \frac{x+5}{x(x^2-1)}$
15. $(x-3)(x+5)y' + 8y = 4(x+5)^2$

© 1.11. (Labo C16) Résolvez les équations différentielles suivantes.

1. $\frac{d^2y}{dx^2} + 4 \sin 3x = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1$
2. $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x}$
3. $x \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = x^2$
4. $(1 + x^2)y'' - 2xy' = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3$
5. $\frac{d^2y}{dx^2} + 3 \frac{dy}{dt} + 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$
6. $\frac{d^2y}{dx^2} - 9y = 0$
7. $\frac{d^2y}{dx^2} - 5 \frac{dy}{dx} + 4y = 0, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = 8$
8. $\frac{d^2y}{dx^2} - 6 \frac{dy}{dx} + 9y = 0$
9. $\frac{d^2y}{dx^2} + 4 \frac{dy}{dx} + 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
10. $\frac{y' - y}{y''} = 3$
11. $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$
12. $x(y'' + 1) + y' = 0$
13. $y'' + 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$
14. $-e^{3x} \frac{d^2y}{dx^2} = 3(e^{6x} + 1), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$
15. $7y'' + 6y' - y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 2$

⊗⊗ 1.12. Résolvez les équations différentielles suivantes.

1. $y'' = -xe^x - \cos x$
2. $y'' = 3x + 2$
3. $e^{2x}y'' = 4(e^{4x} + 1)$
4. $y'' = -9 \sin 3x$
5. $\frac{d^2s}{dt^2} = g$
6. $xy'' = 2$

⊗⊗ 1.13. Résolvez les équations différentielles suivantes.

1. $x^2y'' + xy' = 1$
2. $xy'' + y' + x = 0$
3. $xy'' - 3y' + 4x = 0$
4. $y'' - y' = 2x - x^2$
5. $xy'' - y' = 8x^3$
6. $xy'' - y' = x^2e^x$
7. $y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x$

⊗⊗ 1.14. Résolvez les équations différentielles suivantes.

- | | |
|-------------------------|--------------------------|
| 1. $y'' - 3y' + 2y = 0$ | 7. $y'' - 4y' + 5y = 0$ |
| 2. $y'' + 5y' + 6y = 0$ | 8. $y'' + 4y' + 3y = 0$ |
| 3. $y'' - y' = 0$ | 9. $y'' - 4y = 0$ |
| 4. $y'' - 2y' + y = 0$ | 10. $y'' + 2y' - 3y = 0$ |
| 5. $y'' + 9y = 0$ | 11. $y'' + 4y = 0$ |
| 6. $y'' - 2y' + 5y = 0$ | 12. $y'' + 2y' + y = 0$ |

⊙ 1.15. (Labo C17) Résolvez les équations différentielles suivantes.

1. $\frac{d^2y}{dx^2} - 8\frac{dy}{dx} + 7y = 14$
2. $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - 4y = 8x + 6, \quad y(0) = -3, \quad y'(0) = 4$
3. $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 3x^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$
4. $\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = 6e^{3x}, \quad y(0) = \frac{4}{3}, \quad y'(0) = 7$
5. $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 3y = e^{-x} \cos x$
6. $\frac{d^2y}{dx^2} - 7\frac{dy}{dx} + 12y = x, \quad y(0) = \frac{151}{144}, \quad y'(0) = \frac{37}{12}$
7. $y'' + 9y = 3 \cos 3x$
8. $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = 3e^{2x}$

☞☞ 1.16. Résolvez les équations différentielles suivantes.

- | | |
|---------------------------------|-------------------------------------|
| 1. $y'' + 9y = (x^2 + 1)e^{3x}$ | 7. $y'' - y = 5x + 2$ |
| 2. $y'' - y = e^x$ | 8. $y'' - 3y' = 2 - 6x$ |
| 3. $y'' - 9y = (x^2 + 1)e^{3x}$ | 9. $y'' + 4y = 2 \sin 2x$ |
| 4. $y'' + 2y' + y = x^2 e^{-x}$ | 10. $y'' + 4y' + 3y = 6x + 23$ |
| 5. $y'' - 7y' + 12y = x$ | 11. $y'' + 4y = e^{3x}$ |
| 6. $y'' + y' - 2y = 8 \sin 2x$ | 12. $y'' - y = \cos 2x - 2 \sin 2x$ |

☆ 1.17. Résolvez les équations différentielles suivantes.

- | | |
|---|--|
| 1. $y'' - 3y' + 2y = 10x \sin x - 5 \sin x + \cos x$ | 12. $y'' + 4y' + 13y = 50xe^{-x}$,
$y(0) = 1, y'(0) = 5$ |
| 2. $y'' - 3y' + 2y = 4xe^{2x}$ | 13. $y'' - 9y' + 20y = 580 \cos(2x)$,
$y(0) = 20, y'(0) = -18$ |
| 3. $y'' - 4y' + 4y = 10e^{2x}$ | 14. $y'' - 2y' + y = \cos t$,
$y(0) = y'(0) = 0$ |
| 4. $y'' - 5y' + 6y = 10e^{2x}$ | 15. $y'' - 6y' + 8y = 14e^{4x}$,
$y(0) = 3, y'(0) = 17$ |
| 5. $y'' + 3y' - 18y = 324xe^{3x}$ | 16. $y'' - 5y' + 6y = 11e^{3x}$,
$y(0) = -5, y'(0) = 6$ |
| 6. $y'' + 2y' - 24y = 200xe^{4x}$ | 17. $y'' - 2y' + 5y = 20t^3 - 19t^2$,
$y(0) = -1, y'(0) = 1$ |
| 7. $y'' + 5y' + 6y = 170e^x \sin x$ | |
| 8. $y'' - 2y' + 5y = 20t^3 - 19t^2$,
$y(0) = -1, y'(0) = 1$ | |
| 9. $y'' + 3y' - 18y = 324xe^{3x}$ | |
| 10. $y'' + 2y' - 24y = 200xe^{4x}$ | |
| 11. $y'' - y' - 6y = 52 \sin 2t$,
$y(0) = 4, y'(0) = -11$ | |

Oplossingen - Solutions

1.1.

1. 1 (y')
2. 1 (y')
3. 1 (y')
4. 2 (y'')
5. 2 (y'')

1.2.

1. $x dx - y dy = 0$, gescheiden veranderlijken/variables séparées
2. $y dx - x dy = 0$, scheidbare veranderlijken/variables séparables
3. $ye^x dx - \operatorname{tg} x \cos y dy = 0$, scheidbare veranderlijken/variables séparables
4. $(x^2 + 3xy + y^2)dx - (2x^2 + xy + y^2)dy = 0$, homogene differentiaalvergelijking/équation
5. $(3x^2 + 10xy + 3y^2)dx + (5x^2 + 6xy + 3y^2)dy = 0$, homogene differentiaalvergelijking/équation
6. $(6y \sin x - e^x)dx + dy = 0$, lineaire differentiaalvergelijking/équation différentielle linéaire
7. $(e^x y + \operatorname{tg} x)dx + x dy = 0$, lineaire differentiaalvergelijking/équation différentielle linéaire
8. $y' = -\frac{x^2}{y^4}$, gescheiden veranderlijken/variables séparées
9. $y' = -\frac{x^2 y^3}{e^x \sin y}$, scheidbare veranderlijken/variables séparables
10. $y' = -\frac{x^2 + y^2}{2xy}$, homogene differentiaalvergelijking/équation homogène
totale vergelijking/différentielle totale

1.3.

1. $\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-y^2} = C$
2. $\ln|y| - \frac{y^2}{2} = \ln|x| + \frac{x^2}{2} - 1$
3. $\frac{t\sqrt[3]{1+z^3}}{\sqrt{1+t^2}} = C$
4. $y^2 = x^2 - Cx$
5. $y = \frac{C}{x} - \frac{x}{2}$
6. $y^2 + 2yx^2 + x^2 = 9$
7. $C = y(x \sin x + 1)$
8. $y = \frac{t^4}{2} + \frac{3}{2}t^2$
9. $y = \frac{1}{2}(e^x + 3e^{-x})$
10. $y = 2e^x - x + 1$
11. $y = \frac{-5e^{\cos x} + C}{\sin x}$
12. $2e^{\frac{y^2}{2}} = \sqrt{e}(1 + e^x)$
13. $y = x^4 - \frac{2}{x^2}$
14. $\frac{x^3}{3} + \frac{y^4}{4} + xy = C$
15. $3y = 2 + Ce^{-3x}$
16. $y(3x^2 - 2y^2) = 10$
17. $y = Ce^{\frac{x^2}{2}} - 1$
18. $\frac{x^2}{2} - e^{-x} \sin y - \frac{y^2}{2} = C$

1.4.

1250

1.5. 1 uur - 1 heure

1.6.

- | | |
|--|--|
| 1. $y^2 = 4x^2 + C$ | 7. $y = Cx$ |
| 2. $2y^3 = 3x^6 + C$ | 8. $y = \frac{-x + C}{x - 1}$ |
| 3. $y = \frac{x^2}{Cx^2 + x - 2}$ | 9. $\operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} x + C$ |
| 4. $y^3 = \frac{C(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}}{x^3} - 1$ | 10. $\arcsin y = \arcsin x + C$ |
| 5. $\operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} x + C$ | 11. $y = \operatorname{arctg} C(1 - e^x)^3$ |
| 6. $\operatorname{tg} y = -\operatorname{cotg} x + C$ | 12. $y^2 = \frac{C + x^2}{x^2 - 1}$ |

1.7.

- | | |
|-------------------------------|---|
| 1. $y^2 = \frac{C + x^3}{3x}$ | 5. $y^2 = x^2 + Cx$ |
| 2. $xy \sin \frac{y}{x} = C$ | 6. $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \frac{1}{2} \ln x^2 + y^2 = C$ |
| 3. $3x^2y - 2y^3 = C$ | 7. $\ln y + \frac{y}{x} = C$ |
| 4. $4x^2 + 2xy - 2y^2 = C$ | |

1.8.

- | | |
|--|------------------------------------|
| 1. $\frac{1}{3}x^3 + xy + \frac{1}{4}y^4 = C$ | 4. $\frac{1}{3}x^3 + xy - y^2 = C$ |
| 2. $\frac{1}{2}x^2 - e^{-x} \sin y - \frac{1}{2}y^2 = C$ | 5. $xy - \frac{1}{4}y^4 = C$ |
| 3. $y = \frac{C}{x} - \frac{1}{2}x^3$ | 6. $3x^2y^2 + x^4 + y^3 = C$ |

1.9.

- | | |
|----------------------------------|---|
| 1. $y = -e^{2x} + Ce^{3x}$ | 7. $y = x^{-1}e^x - 2x^{-2}e^x + 2x^{-3}e^x + Cx^{-3}$ |
| 2. $y = -1 + Ce^{\frac{x^2}{2}}$ | 8. $y = (x + 1)^2 \left(\frac{x^2}{2} + x + C \right)$ |
| 3. $y = \frac{x + C}{\sin x}$ | 9. $y = x^n e^x + Cx^n$ |
| 4. $y = \frac{x^6 + C}{x^2}$ | 10. $y = xe^{-x} + Ce^{-x}$ |
| 5. $y = x^3 + Cx$ | 11. $y = \sin x - 1 + Ce^{-\sin x}$ |
| 6. $y = \frac{Ce^{x^2}}{x}$ | 12. $y = x + Cx\sqrt{1 - x^2}$ |

1.10.

1. $y = -20xe^x - 5e^x + Ce^{5x}$
2. $\frac{1}{2}e^y \cos y + \frac{1}{2}e^y \sin y - \operatorname{arctg} x = C$
3. $y = xe^{10x} + Ce^{10x}$
4. $y \arcsin y + \sqrt{1 - y^2} - \arcsin x = C$
5. $y = 4 \sin 2x + 6 \cos 2x + Ce^{-3x}$
6. $y = \operatorname{tg}(2\sqrt{x} - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x} + C)$
7. $y = \frac{1}{2} \cos x^3 + \frac{1}{2} \sin x^3 + Ce^{-x^3}$
8. $y = \frac{2 \arcsin \frac{x}{2}}{x^3} - \frac{\sqrt{4 - x^2}}{2x^2} + \frac{C}{x^3}$
9. $y = -\frac{1}{2x} \cos 2x + \frac{1}{2x^2} \sin 2x + \frac{1}{4x^3} \cos 2x + \frac{C}{4x^3}$
10. $y = \frac{x^3 - x^2 + Cx - C}{2(x + 3)}$
11. $z = -\frac{1}{t} \cos t + \frac{1}{t^2} \sin t - \frac{1}{t^2}$
12. $y = 12x^2 - 12 + 17e^{-x^2}$
13. $y = 8x^3 - 8 + 13e^{-x^3}$
14. $y = \frac{1}{2x^2} + \frac{5}{x^3} + \frac{3 \ln |x - 1| - 2 \ln |x + 1| + C}{x^4}$
15. $y = \frac{(4x + C)(x + 5)}{(x - 3)}$

1.11.

1. $y = \frac{4}{9} \sin 3x - \frac{1}{3}x + 2$
2. $y = x \ln |x| - x - C_1x + C_2$
3. $y = \frac{x^3}{9} + C_1 \ln |x| + C_2$
4. $y = x^3 + 3x$
5. $y = e^{-x}$
6. $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x}$
7. $y = e^{4x} + 4e^x$
8. $y = e^{3x}(C_1x + C_2)$
9. $y = xe^{-2x}$
10. $y = e^{\frac{t}{6}}(C_1 \cos \frac{\sqrt{11}}{6}t + C_2 \sin \frac{\sqrt{11}}{6}t)$
11. $y = \sin 2x$
12. $y = -\frac{x^2}{4} + C_1 \ln |x| + C_2$
13. $y = e^{-3x} + 5xe^{-3x}$
14. $3y = -e^{-3x} - e^{-3x} + 6x + 5$
15. $y = -\frac{11}{8}e^{-x} + \frac{35}{8}e^{\frac{x}{7}}$

1.12.

- | | |
|--|-----------------------------------|
| 1. $y = \cos x - xe^x + 2e^x + Cx + D$ | 4. $y = \sin 3x + Cx + D$ |
| 2. $y = \frac{1}{2}x^3 + x^2 + Cx + D$ | 5. $s = \frac{1}{2}gt^2 + Ct + D$ |
| 3. $y = e^{2x} + e^{-2x} + Cx + D$ | 6. $y = 2x \ln x + Cx + D$ |

1.13.

- | | |
|--|--|
| 1. $y = \frac{1}{2} \ln^2 x + C \ln x + D$ | 5. $y = x^4 + Cx^2 + D$ |
| 2. $y = -\frac{1}{4}x^2 + C \ln x + D$ | 6. $y = xe^x - e^x + Cx^2 + D$ |
| 3. $y = x^2 + Cx^4 + D$ | 7. $y = -x - \sin x \cos x + C \sin x + D$ |
| 4. $y = \frac{1}{3}x^3 + Ce^x + D$ | |

1.14.

1. $y = Ae^x + Be^{2x}$
2. $y = Ae^{-2x} + Be^{-3x}$
3. $y = A + Be^x$
4. $y = Ae^x + Bxe^x$
5. $y = A \cos 3x + B \sin 3x$
6. $y = Ae^x \cos 2x + Be^x \sin 2x$
7. $y = Ae^{2x} \sin x + Be^{2x} \cos x$
8. $y = Ae^{-3x} + Be^{-x}$
9. $y = Ae^{2x} + Be^{-2x}$
10. $y = Ae^x + Be^{-3x}$
11. $y = A \cos 2x + B \sin 2x$
12. $y = Ae^{-x} + Bxe^{-x}$

1.15.

1. $y = C_1 e^{7x} + C_2 e^x + 2$
2. $y = \frac{6}{5}e^x - \frac{6}{5}e^{-4x} - 2x - 3$
3. $y = \left(-\frac{1}{8} + \frac{3}{4}x\right)e^{2x} + \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{8}$
4. $y = \cos 3x + 2 \sin 3x + \frac{1}{3}e^{3x}$
5. $y = e^x(C_1 \cos \sqrt{2}x + C_2 \sin \sqrt{2}x) + \frac{1}{41}e^{-x}(5 \cos x - 4 \sin x)$
6. $y = e^{3x} + \frac{1}{12}x + \frac{7}{144}$
7. $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + \frac{1}{2}x \sin 3x$
8. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x} + \frac{3}{5}x e^{2x}$

1.16.

1. $y = A \sin 3x + B \cos 3x + \frac{1}{162}(9x^2 - 6x + 10)e^{3x}$
2. $y = Ae^{-x} + Be^x + \frac{1}{2}xe^x$
3. $y = Ae^{3x} + Be^{-3x} + \frac{1}{108}(6x^2 - 3x^2 + 19x)e^{3x}$
4. $y = Ae^{-x} + Bxe^{-x} + \frac{1}{12}x^4 e^{-x}$
5. $y = Ae^{4x} + Be^{3x} + \frac{1}{12}x + \frac{7}{144}$
6. $y = Ae^x + Be^{-2x} - \frac{2}{5} \cos 2x - \frac{6}{5} \sin 2x$
7. $y = Ae^x + Be^{-x} - 5x - 2$
8. $y = Ae^{3x} + B + x^2$
9. $y = A \sin 2x + B \cos 2x - \frac{1}{2}x \cos 2x$
10. $y = Ae^{-x} + Be^{-3x} + 2x + 5$
11. $y = A \sin 2x + B \cos 2x + \frac{1}{13}e^{3x}$
12. $y = Ae^x + Be^{-x} - \frac{1}{5} \cos 2x + \frac{2}{5} \sin 2x$

1.17.

1. $y = Ae^x + Be^{2x} + 3x \cos x + x \sin x - 2 \sin x + 2 \cos x$
2. $y = Ae^x + Be^{2x} + 2x^2e^{2x} - 4xe^{2x}$
3. $y = Ae^{2x} + Bxe^{2x} + 5x^2e^{2x}$
4. $y = Ae^{2x} + Be^{3x} - 10xe^{2x}$
5. $y = Ae^{3x} + Be^{-6x} + 18x^2e^{3x} - 4xe^{3x}$
6. $y = Ae^{4x} + Be^{-6x} + 10x^2e^{4x} - 2xe^{4x}$
7. $y = Ae^{-2x} + Be^{-3} - 7e^x \cos x + 11e^x \sin x$
8. $y = e^t \cos 2t + 2e^t \sin 2t + 4t^3 + t^2 - 4t - 2$
9. $y = Ae^{3x} + Be^{-6x} + 18x^2e^{3x} - 4xe^{3x}$
10. $y = Ae^{4x} + Be^{-6x} + 10x^2e^{4x} - 2xe^{4x}$
11. $y = 2e^{-2t} + e^{3t} + \cos 2t - 5 \sin 2t$
12. $y = e^{-2x} \sin 3x + 2e^{-2x} \cos 3x + 5xe^{-x} - e^{-x}$
13. $y = 2e^{4x} + 2e^{5x} + 16 \cos 2x - 18 \sin 2x$
14. $y = \frac{1}{2}te^t - \frac{1}{2} \sin t$
15. $y = 7xe^{4x} + 2e^{4x} + e^{2x}$
16. $y = 11xe^{3x} + 5e^{3x} - 10e^{2x}$
17. $y = 2e^t \sin 2t + e^t \cos 2t + 4t^3 + t^2 - 4t - 2$

CHAPITRE 2

TRANSFORMÉE DE LAPLACE

© **2.1.** (Labo C17) Résolvez les équations différentielles suivantes à l'aide de la transformée de Laplace.

1. $x' - x = 3t + 5, \quad x(0) = -8$
2. $x' - x = \sin t - \cos t, \quad x(0) = 0$
3. $x'' - x' = 0, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1$
4. $y'' - y = e^x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
5. $y'' + 9y = 6e^{3x}, \quad y(0) = \frac{4}{3}, \quad y'(0) = 7$

⊗⊗ **2.2.** Résolvez les équations différentielles suivantes à l'aide de la transformation de Laplace.

1. $x'' + 9x = 1, \quad x(0) = x'(0) = 0$
2. $x'' + 3x' + 2x = t, \quad x(0) = x'(0) = 0$
3. $x'' + 2x' + 5x = \sin t, \quad x(0) = x'(0) = 0$
4. $x'' + 4x = \sin 3t, \quad x(0) = x'(0) = 0$
5. $x'' + 3x' + 2x = 0, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 2$
6. $x'' - 3x' + 2x = e^{5t}, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 2$

☆ **2.3.** Résolvez les équations différentielles suivantes à l'aide de la transformation de Laplace.

- | | |
|---|---|
| 1. $y' + y = 2e^x, \quad y(0) = 0$ | 5. $y' - 5y = 25x, \quad y(0) = 1$ |
| 2. $y' + 4y = 25 \sin 3x, \quad y(0) = 0$ | 6. $y' + 5y = 29 \sin 2x, \quad y(0) = 5$ |
| 3. $y' - y = e^{2x}, \quad y(0) = 2$ | 7. $y' - 3y = 4e^{5x}, \quad y(0) = 1$ |
| 4. $y' + y = x^2, \quad y(0) = 0$ | 8. $y' - 3y = 10 \sin x, \quad y(0) = 4$ |
| | 9. $y' - 10y = 500x^2, \quad y(0) = 1$ |

☆ **2.4.** Résolvez les équations différentielles suivantes à l'aide de la transformation de Laplace.

1. $y'' + 2y' - 24y = 400 \sin(2x), \quad y(0) = 8, \quad y'(0) = 2$
2. $y'' + 3y' - 18y = 360 \cos(3x), \quad y(0) = -5, \quad y'(0) = -12$
3. $y'' - 8y' + 15y = 4e^{5x}, \quad y(0) = y'(0) = 0$
4. $y'' - 4y' + 4y = 8 \sin 2x, \quad y(0) = y'(0) = 0$
5. $y'' - 2y' + 2y = 5 \sin x, \quad y(0) = y'(0) = 0$

Oplossingen - Solutions

2.1.

1. $x = -3t - 8$
2. $x = -\sin t$
3. $x = e^t - 1$
4. $y = \frac{1}{4}e^x + \frac{3}{4}e^{-x} + \frac{1}{2}xe^x$
5. $y = \frac{1}{3}e^{3x} + \cos 3x + 2 \sin 3x$

2.2.

1. $\frac{1}{9}(1 - \cos 3x)$
2. $\frac{1}{2}x - \frac{3}{4} - \frac{1}{4}e^{-2x} + e^{-x}$
3. $-\frac{1}{20}e^{-x} \sin 2x + \frac{1}{10}e^{-x} \cos 2x + \frac{1}{5} \sin x - \frac{1}{10} \cos x$
4. $\frac{3}{10} \sin 2x - \frac{1}{5} \sin 3x$
5. $-3e^{-2x} + 4e^{-x}$
6. $\frac{1}{12}e^{5x} + \frac{2}{3}e^{2x} + \frac{1}{4}e^x$

2.3.

- | | |
|--|--|
| 1. $e^x - e^{-x}$ | 5. $-5x - 1 + 2e^{5x}$ |
| 2. $-3 \cos 3x + 4 \sin 3x + 3e^{-4x}$ | 6. $-2 \cos 2x + 5 \sin 2x + 7e^{-5x}$ |
| 3. $e^{2x} + e^x$ | 7. $2e^{5x} - e^{3x}$ |
| 4. $x^2 - 2x + 2 - 2e^{-x}$ | 8. $-\cos x - 3 \sin x + 5e^{3x}$ |
| | 9. $-50x^2 - 10x - 1 + 2e^{10x}$ |

2.4.

1. $e^{-6x} + 9e^{4x} - 2 \cos 2x - 14 \sin 2x$
2. $5e^{-6x} + 2e^{3x} - 12 \cos 3x + 4 \sin 3x$
3. $-e^{5x} + e^{3x} + 2xe^{5x}$
4. $-e^{2x} + 2xe^{2x} + \cos 2x$
5. $e^x \sin x - 2e^x \cos x + 2 \cos x + \sin x$

CHAPITRE 3

SÉRIES DE FOURIER

© **3.1.** (Labo C18) Déterminez la série de Fourier des fonctions périodiques (de période 2π) suivantes.

1. $y = \begin{cases} -1, & x \in]-\pi, 0], \\ 2, & x \in]0, \pi]. \end{cases}$
2. $y = \frac{\pi - x}{2}, \quad x \in [0, 2\pi[$
3. $y = \frac{x^2}{4}, \quad x \in [-\pi, \pi]$
4. $y = \begin{cases} -\cos x, & x \in]-\pi, 0], \\ +\cos x, & x \in]0, \pi]. \end{cases}$
5. $y = \begin{cases} 0, & x \in]-\pi, 0], \\ x, & x \in]0, \pi]. \end{cases}$

☆ **3.2.** Déterminez la série de Fourier des fonctions périodiques (de période 2π) suivantes.

1. $y = \begin{cases} 4, & x \in]-\pi, 0], \\ -2, & x \in]0, \pi]. \end{cases}$
2. $y = -3x, \quad x \in [0, 2\pi[$

Oplossingen - Solutions
3.1.

1. $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{6}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right)$
2. $f(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x + \dots$
3. $f(x) = \frac{\pi^2}{12} - \cos x + \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{9} \cos 3x + \dots$
4. $f(x) = \frac{8}{\pi} \left(\frac{1}{3} \sin 2x + \frac{2}{15} \sin 4x + \frac{3}{35} \sin 6x + \dots \right)$
5. $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \left(\cos x + \frac{1}{9} \cos 3x + \frac{1}{25} \cos 5x + \dots \right) + \left(\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x + \dots \right)$

3.2.

1. $f(x) = 1 - \frac{12}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right)$
2. $-3\pi + 6 \left(\sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x + \dots \right)$

CHAPITRE 4

INTÉGRALES DOUBLES

© 4.1. (Labo C17) Calculez les intégrales doubles suivantes.

1. $\int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} xy \sin x dx dy$
2. $\int \int_R ye^{xy} dx dy, \quad R : 0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 1$
3. $\int_3^4 \int_1^2 \frac{1}{(x+y)^2} dy dx$

© 4.2. (Labo C17) Calculez, à l'aide d'une intégrale double, l'aire de la région bornée par

$$\begin{cases} x = 1 - y^2 \\ y = x + 1 \end{cases}$$

☹☹ 4.3. Calculez, à l'aide d'une intégrale double, l'aire de la région bornée par

$$\begin{cases} x^2 = 4y \\ 8y = x^2 + 16 \end{cases}$$

⊗⊗ 4.4. Calculez, à l'aide d'une intégrale double, l'aire de la région bornée par

$$\begin{cases} y = \sin x \\ y = \cos x \\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

⊙ 4.5. (Labo C17) Calculez, à l'aide d'une intégrale double, le volume du corps, borné par

$$\begin{cases} z = 2x \\ 0 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

⊙ 4.6. (Labo C17) Calculez, à l'aide d'une intégrale double, le volume du corps, borné par

$$\begin{cases} z = \frac{3}{2} - \frac{x}{7} - \frac{y}{2} \\ x = 0 \\ y = -1 \\ y = 1 \\ x = 1 + y^2 \end{cases}$$

⊙ 4.7. (Labo C17) Calculez, à l'aide d'une intégrale double, le volume du corps, borné par

$$\begin{cases} z = 8 - x^2 - y^2 \\ -1 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

⊗⊗ 4.8. Calculez, à l'aide d'une intégrale double, le volume du corps, borné par

$$\begin{cases} z = 12 + y - x^2 \\ x = y^2 \\ y = x^2 \end{cases}$$

Oplossingen - Solutions

4.1.

1. $\frac{1}{2}$
2. $\frac{e^2 - 3}{2}$
3. $\ln \frac{25}{24}$

4.2.

$$\frac{9}{2}$$

4.3.

$$\frac{32}{3}$$

4.4.

$$\sqrt{2} - 1$$

4.5.

$$18$$

4.6.

$$\frac{56}{15}$$

4.7.

$$\frac{88}{3}$$

4.8.

$$\frac{569}{140}$$

CHAPITRE 5

STATISTIQUE DESCRIPTIVE

- ☞☞ 5.1. Dans une expérience on mesure 50 personnes. Le tableau ci-joint représente les résultats de l'expérience. Construisez la représentation graphique de ces données à l'aide d'un histogramme, d'un polygone de fréquences et d'une ogive. Calculez la moyenne, la médiane, et le mode de ces résultats. Déterminez la déviation standard des résultats. Calculez D_4 , P_{10} et P_{90} . Construisez le boxplot.

Class	Abs. freq.
[150, 155[4
[155, 160[7
[160, 165[18
[165, 170[11
[170, 175[6
[175, 180[4
Tot.	50

- ☞☞ **5.2.** Dans une expérience on mesure le délai (en secondes) entre un signal et la réaction au signal dans un échantillon de 50 personnes. Le tableau ci-joint représente les résultats de l'expérience. Les résultats sont arrondis à un dixième d'une seconde. Construisez le tableau de fréquences, avec des classes dont la taille est 1 seconde. Construisez la représentation graphique de ces données à l'aide d'un histogramme, d'un polygone de fréquences et d'une ogive. Calculez la moyenne, la médiane, et le mode de ces résultats. Déterminez la déviation standard des résultats. Calculez D_4 , P_{10} et P_{90} . Construisez le boxplot.

2.0; 1.8; 2.3; 2.1; 2.0; 2.2; 2.1; 2.2; 2.1; 2.1;
 2.0; 2.0; 1.8; 1.9; 2.2; 2.0; 2.2; 2.4; 2.1; 2.0;
 2.2; 2.1; 2.2; 1.9; 1.7; 2.0; 2.0; 2.3; 2.1; 1.9;
 2.0; 2.2; 1.6; 2.1; 2.3; 2.0; 2.0; 2.0; 2.2; 2.6;
 2.0; 2.0; 1.9; 1.9; 2.2; 2.3; 1.8; 1.7; 1.7; 1.8;

- ☞☞ **5.3.** Même question, mais utilisez maintenant une division en classes de 2 secondes, ou une division en classes de 0.5 secondes.

Oplossingen - Solutions**5.1.****5.2.****5.3.**